Première année Bac sciences expérimentales

SEMESTRE 2

06 Cours bien détaillés

06 Résumés bien précis

06 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 03/09/2025

Table des matières

7 : Limite d'une fonction

Cours 7.....03
Résumé 7.....08
Série 7.....09

8 : Rotation

Cours 8.....10
Résumé 8.....15
Série 8.....16
Devoir Libre 4.....17
DS4-A.....18
DS4-B.....19

9 : Dérivation

Cours 9.....20
Résumé 9.....28
Série 9.....30

10 : Vecteurs de l'espace

Cours 10.....31
Résumé 10.....36
Série 10.....37
Devoir Libre 5.....38
DS5-A.....39
DS5-B.....40

11 : Etude de fonctions

Cours 11.....41
Résumé 11.....49
Série 11.....50

12 : Analytique de l'espace

Cours 12.....52
Résumé 12.....59
Série 12.....60
Devoir Libre 6.....61
DS6-A.....62
DS6-B.....63

Corrections des séries et les devoirs libres :

https://drive.google.com/file/d/1sbgbvjul-0Z8rlYRR3A1yE9QsvT3DpA4/view?usp=sharing

07

Limite d'une fonction

1) Limites usuelles

Activité 1 :

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	1	2	5	10	10^2	10^3
x^2						
x^3						
$\sqrt{x}$						
$\frac{1}{x}$						

1) Lorsque x prend des valeurs plus en plus grandes, les réels x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ prennent des valeurs :

……

On dit que la **limite** de x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à ……..

On écrit ……

2) Lorsque x s'approche de plus en plus de $+\infty$, le réel $\frac{1}{x}$ s'approche de plus en plus de ……

On dit que la **limite** de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est …… On écrit ……

Activité 2 :

Recopier et compléter le tableau suivant :

	x s'approche de plus en plus de 0 et $x<0$						x s'approche de plus en plus de 0 et $x>0$				
	-0.03	-0.02	-0.01	-0.002	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	0.002	0.01	0.02	0.03
$\frac{1}{x}$					…….		…….				

1) Lorsque x s'approche de plus en plus de 0 et $x>0$, le réel $\frac{1}{x}$ s'approche de plus en plus de ……

On dit que la **limite à droite** de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 est …. On écrit …… ou bien ……

2) Lorsque x s'approche de plus en plus de 0 et $x<0$, le réel $\frac{1}{x}$ s'approche de plus en plus de ……

On dit que la **limite à gauche** de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 est …. On écrit …… ou bien ……

Propriété 1 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x}$: N'existe pas

(On dit que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de limite en $-\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$: N'existe pas

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \sqrt{x}$: N'existes pas

$\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$

Exemple 1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0} x^5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 \times \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$

Propriété 2 :

Pour que f admet une limite l en a, il faut et il suffit qu'elle admette la limite l à droite et à gauche en a.

Autrement dit : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

En particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ alors f n'admet pas de limite en a.

Exemple 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}-5 & si\ \ x>4 \\ x-5+\dfrac{1}{x} & si\ \ x<4 \end{cases}$

1) Calculer $f(9)$, $f(1)$, $f(16)$, $f(3)$ et $f(2)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

3) f admet-elle la limite en 4 ?

4) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et conclure.

5) Montrer que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

Remarques 4 : Conditions nécessaires pour l'existence d'une limite

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition.

- Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a. (Exemple $]a-0,1;a[\cup]a;a+0,1[\subset D_f$)
- Pour calculer $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a à droite. (Exemple $]a;a+0.1[\subset D_f$)
- Pour calculer $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a à gauche. (Exemple $]a-0,1;a[\subset D_f$)
- Pour calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de $+\infty$. (Exemple $]10^9;+\infty[\subset D_f$)
- Pour calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de $-\infty$. (Exemple $]-\infty;-10^9[\subset D_f$)

2) Opérations sur les limites

Propriété 3 :

$"(+\infty)+(+\infty)"=+\infty$	$"(+\infty)\times(+\infty)"=+\infty$	$"\frac{1}{\pm\infty}"=0$	$"\frac{+\infty}{3}"=+\infty$; $"\frac{+\infty}{-3}"=-\infty$
$"(-\infty)+(-\infty)"=-\infty$	$"(+\infty)\times(-\infty)"=-\infty$	$"\frac{3}{\pm\infty}"=0$; $"\frac{-3}{\pm\infty}"=0$	$"\frac{-\infty}{3}"=-\infty$; $"\frac{-\infty}{-3}"=+\infty$
$"(+\infty)+(-\infty)"=F.I$	$"(-\infty)\times(-\infty)"=+\infty$	$"\frac{1}{0^+}"=+\infty$; $"\frac{1}{0^-}"=-\infty$	$"\frac{\pm\infty}{\pm\infty}"=F.I$
$"(+\infty)+3"=+\infty$	$"(+\infty)\times 3"=+\infty$	$"\frac{3}{0^+}"=+\infty$; $"\frac{-3}{0^+}"=-\infty$	$"\frac{0}{0}"=F.I$
$"(+\infty)-3"=+\infty$	$"(+\infty)\times(-3)"=-\infty$	$"\frac{3}{0^-}"=-\infty$; $"\frac{-3}{0^-}"=+\infty$	$"(0^+)^n"=0^+$
$"(-\infty)+3"=-\infty$	$"(-\infty)\times 3"=-\infty$		$"(0^-)^n"=\begin{cases}0^+ & (n\ est\ pair)\\ 0^- & (n\ est\ impair)\end{cases}$
$"(-\infty)-3"=-\infty$	$'(-\infty)\times(-3)"=+\infty$		
$"(+\infty)^n"=+\infty$	$"(\pm\infty)\times 0"=F.I$		
$"(-\infty)^n"=\begin{cases}+\infty & (n\ est\ pair)\\ -\infty & (n\ est\ impair)\end{cases}$	$"\sqrt{+\infty}"=+\infty$		

Remarques 1

- Il existe donc quatre formes indéterminées $"(+\infty)+(-\infty)"$, $"(\pm\infty)\times 0"$, $"\frac{\infty}{\infty}"$ et $"\frac{0}{0}"$ où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.
- Il existe plusieurs méthodes pour lever l'indétermination (exemples : **Les identités remarquables, factorisation, division euclidienne, multiplier par la conjuguée, multiplier et diviser par le même nombre, changement de variables, effectuer un encadrement, utilisation des propriétés 4, 5 et 6**)

4) Limites des fonctions trigonométriques

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Propriété 5 :

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\lim\limits_{x\to a} cos(x) = cos(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} sin(x) = sin(a)$
- Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a : $\lim\limits_{x\to a} tan(x) = tan(a)$
- $\begin{cases} \lim\limits_{X\to 0} \frac{sin(X)}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 0} \frac{tan(X)}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 0} \frac{1-cos(X)}{X^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(ax)}{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{tan(ax)}{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Exemple 8 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} sin(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(3x)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(5x)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 5} \frac{tan(x-5)}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x \times sin(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{cos(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} tan(x)$; $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tan(x)$

5) Limite et ordre

Propriété 6 :

• $\begin{cases} g(x) < f(x) < h(x) \\ \lim g(x) = l \\ \lim h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = l$	• $\begin{cases} \lvert f(x) - l \rvert < g(x) \\ \lim g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = l$
• $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ \lim g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = +\infty$	• $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ \lim g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = -\infty$

Remarques 2

- $(\forall X \in \mathbb{R}) \quad -1 \le cos(X) \le 1 \quad$ et $\quad -1 \le sin(X) \le 1$
- Les fonctions $x \mapsto cos(x)$, $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto tan(x)$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$

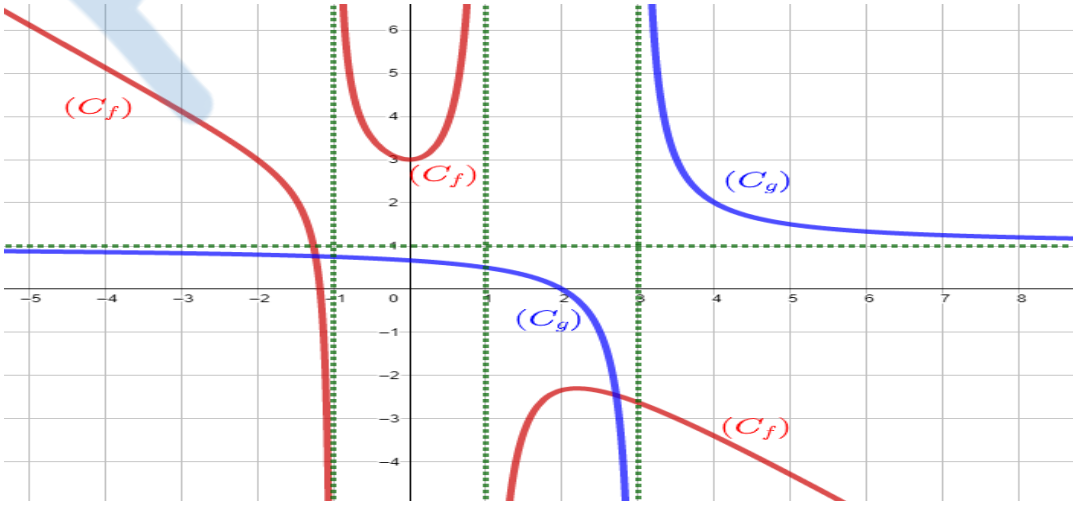
  Autrement dit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} cos(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} sin(x)$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} tan(x)$ n'existes pas.

Exemple 9 : Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2 + cos(x)\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{sin(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \left(3x^2 \times sin(\frac{1}{x^2})\right)$

6) Détermination des limites graphiquement

Exemple 10 :

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ respectivement.



1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)$

2) Dresser le tableau de variations de f en ajoutant les limites précédentes. (On donne $f(2) = -\frac{7}{3}$)

3) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$

4) Dresser le tableau de variations de g.

Résumé 7 : Limite d'une fonction

Opérations sur les limites

$"(+\infty)+(+\infty)"=+\infty$ $"(-\infty)+(-\infty)"=-\infty$ $"(+\infty)+(-\infty)"=F.I$ $"(+\infty)+3"=+\infty$ $"(+\infty)-3"=+\infty$ $"(-\infty)+3"=-\infty$ $"(-\infty)-3"=-\infty$ $"(+\infty)^n"=+\infty$ $"(-\infty)^n"=\begin{cases}+\infty & (n\ est\ pair)\\ -\infty & (n\ est\ impair)\end{cases}$	$"(+\infty)\times(+\infty)"=+\infty$ $"(+\infty)\times(-\infty)"=-\infty$ $"(-\infty)\times(-\infty)"=+\infty$ $"(+\infty)\times 3"=+\infty$ $"(+\infty)\times(-3)"=-\infty$ $"(-\infty)\times 3"=-\infty$ $'(-\infty)\times(-3)"=+\infty$ $"(\pm\infty)\times 0"=F.I$ $"\sqrt{+\infty}"=+\infty$	$"\frac{1}{\pm\infty}"=0$ $"\frac{3}{\pm\infty}"=0$; $"\frac{-3}{\pm\infty}"=0$ $"\frac{1}{0^+}"=+\infty$; $"\frac{1}{0^-}"=-\infty$ $"\frac{3}{0^+}"=+\infty$; $"\frac{-3}{0^+}"=-\infty$ $"\frac{3}{0^-}"=-\infty$; $"\frac{-3}{0^-}"=+\infty$	$"\frac{+\infty}{3}"=+\infty$; $"\frac{+\infty}{-3}"=-\infty$ $"\frac{-\infty}{3}"=-\infty$; $"\frac{-\infty}{-3}"=+\infty$ $"\frac{\pm\infty}{\pm\infty}"=F.I$ $"\frac{0}{0}"=F.I$ $"(0^+)^n"=0^+$ $"(0^-)^n"=\begin{cases}0^+ & (n\ est\ pair)\\ 0^- & (n\ est\ impair)\end{cases}$

- Il existe donc quatre formes indéterminées $"(+\infty)+(-\infty)"$, $"(\pm\infty)\times 0"$, $"\frac{\infty}{\infty}"$ et $"\frac{0}{0}"$ où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.
- Il existe plusieurs méthodes pour lever l'indétermination (exemples : **Les identités remarquables, factorisation, division euclidienne, multiplier par la conjuguée, multiplier et diviser par le même nombre, changement de variables, effectuer un encadrement…**)

Limite à droite -limite à gauche

* Pour que f admet une limite l en a, il faut et il suffit qu'elle admette la limite l à droite et à gauche en a

Autrement dit : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l\end{cases}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

En particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ alors f n'admet pas de limite en a.

Limites des polynômes et de fonctions rationnelles

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes tel que $Q(a)\neq 0$, $degP(x)=n$ et $degQ(x)=m$

* $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$ et $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$ (a et b sont les coefficients de x^n et x^m dans les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement)

Limites de fonctions trigonométriques

- $\begin{cases}\lim\limits_{X\to 0}\frac{sin(X)}{X}=1\\ \lim\limits_{X\to 0}\frac{tan(X)}{X}=1\\ \lim\limits_{X\to 0}\frac{1-cos(X)}{X^2}=\frac{1}{2}\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(ax)}{ax}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{tan(ax)}{ax}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}\end{cases}$

Limites et ordre

$\begin{cases}g(x)<f(x)<h(x)\\ \lim g(x)=l\\ \lim h(x)=l\end{cases}\Rightarrow \lim f(x)=l$	$\begin{cases}\lvert f(x)-l\rvert<g(x)\\ \lim g(x)=0\end{cases}\Rightarrow \lim f(x)=l$
$\begin{cases}f(x)>g(x)\\ \lim g(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim f(x)=+\infty$	$\begin{cases}f(x)<g(x)\\ \lim g(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim f(x)=-\infty$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 1BSEF

Série 7
Limite d'une fonction

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 : Opérations sur les limites

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 4} 7x^5+3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-5}{1-x}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{-x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} (1-x)^5(-2x^2+5)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{1-4x}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 2 : Limite à gauche – Limite à droite

Soit a un nombre réel et f la fonction définie

par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{-x+3} & x\le 2 \\ f(x)=1-ax^2 & x>2 \end{cases}$

Calculer $f(2)$ et déterminer a tel que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

Exercice 3 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$; $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$;

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-125}{x-5}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3-8}{x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x-1}-3x^2+x+2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}+2x^4-x-1$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^3+(x-2)^2-3}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

Exercice 4 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x}$;

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{4x-3}-x}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{2-7x}-3}$;

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$

Exercice 5 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3x}+x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} -\sqrt{2x^2-9x-4}-8x+3$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2-7x+9}+8x-4$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} -\sqrt{x^2-6x-2}-x+12$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2-4x+7}-3x+8$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2+x}-2x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x+2}$;

Exercice 6 : Polynômes et fonctions rationnelles

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2-7x^5+x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -3x^2+x+1$;

$\lim\limits_{x\to -1} x^2+3x^5-4$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2-5x^3-x^5-3$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+x^2+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{27x^7-x^3}{11x^5-2x^2-15}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4-4x}{8x^4+2x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^3}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^2}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{4x^2+x+1}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^2}$

Exercice 7 : Fonctions trigonométriques

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(4x)}{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3(2x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\tan(2x)}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x\times\tan(x)}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x\times\sin(\dfrac{1}{x})$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)(\cos(x)-1)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin(2x)}{\tan(x)}$; $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{1+2\cos(x)}{\sin(x)}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-3+\sin(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(x)+\sin(x)-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)-\sqrt{3}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan(x)-\sqrt{3}}{6x-2\pi}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x)-1}{2x-\pi}$

Correction

08
Rotation

HIYAB

Rappel

*/ La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.
*/ Si une droite est perpendiculaire à un segment en son milieu, alors c'est sa médiatrice.
*/ Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.
*/ Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
*/ Si une droite passe par deux points équidistants d'un segment, alors c'est sa médiatrice.
*/ Un triangle est rectangle si et seulement si le milieu de son hypoténuse est équidistant de ses sommets.
*/ Si un triangle est isocèle dont l'un de ces angles égale à $60°$ alors il est équilatéral.

*/ $x \equiv y[2\pi]$ se lit « x est congru à y modulo $[2\pi]$ »
*/ $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$
*/ $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ y \equiv z[2\pi] \end{cases} \Rightarrow x \equiv z[2\pi]$
*/ $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ x \equiv z[2\pi] \end{cases} \Rightarrow y \equiv z[2\pi]$
*/ $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow y \equiv x[2\pi]$

*/ $(\vec{v};\vec{u}) \equiv -(\vec{u};\vec{v})[2\pi]$
*/ $(\overrightarrow{-u};\vec{v}) \equiv \pi + (\vec{u};\vec{v})[2\pi]$
*/ $(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{-v}) \equiv (\vec{u};\vec{v})[2\pi]$
*/ $(\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v}) \equiv (\vec{u};\vec{v})[2\pi]$ (Relation de Chasles)

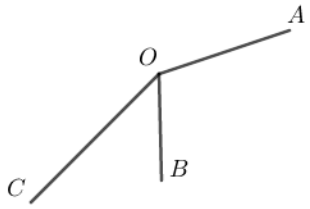
Activités

Activité 1 :

Soit O un point fixe du plan orienté P. On considère les points A, B et C distincts de O

1) a) Construire le cercle (C_A) de centre O et passant par A.

b) Construire sur le cercle (C_A) le point A' tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$



2) a) Construire le cercle (C_B) de centre O et passant par B.

b) Construire sur le cercle (C_B) le point B' tel que $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) Construire le point C' tel que $\begin{cases} OC = OC' \\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Activité 2 :

Soit OAB un triangle rectangle en O tel que $OA < OB$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

1) Construire une figure convenable.

2) a) Montrer que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

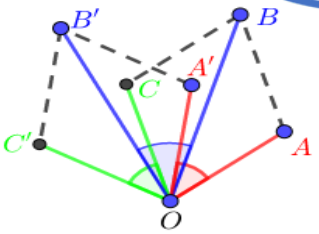
b) En déduire que $(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) a) Montrer que les triangles OAB et $OA'B'$ sont isométriques.

b) En déduire que $AB = A'B'$.

Activité 3 :

Soit O un point du plan P et α un réel.
Soient A et B deux points distinct de O.
On considère la rotation $r(O;\alpha)$.
On pose $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.
Soit C le point tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.
On pose $r(C) = C'$.



1) a) Vérifier que $OC = AB$ et $OA = CB$.

b) En déduire que $OC' = A'B'$ et $OA' = C'B'$ puis que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OC'}$.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \alpha[2\pi]$.

2) Soit D un point du plan distinct de C. On pose $D' = r(D)$.

a) En déduire que $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \alpha[2\pi]$.

b) En utilisant la relation de Chasles montrer que : $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$.

Activité 4 :

Soit a et b deux réels tel que $a+b \neq 0$ on pose $G = Bar\{(A;a);(B;b)\}$.

On considère la rotation $r(O;\alpha)$.

On pose $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(G) = G'$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

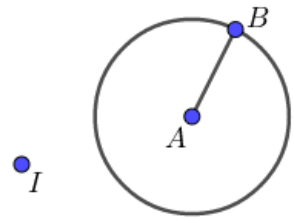
2) a) En déduire que $\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{A'B'}$.

b) En déduire que $G' = Bar\{(A';a);(B';b)\}$.

Activité 5 :

Soit (C) un cercle de centre A et de rayon R. B est un point de (C).

On considère la rotation $r\left(I;\frac{\pi}{3}\right)$.



1) a) Construire A' et B' les images respectives des points A et B par la rotation r.

b) Montrer que $A'B' = R$.

2) Soit M un point de (C) et M' son image par la rotation r.

On note (C') le cercle de centre A' et de rayon R.

a) Vérifier que $A'M' = R$ et déduire que $M' \in (C')$.

b) En déduire que l'image du cercle (C) par la rotation r est le cercle (C').

3) a) Montrer que l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A'B')$

b) Montrer que l'image du segment $[AB]$ par la rotation r est le segment $[A'B']$.

1) Définition d'une rotation – rotation réciproque

A retenir 1

Soit O un point fixe du plan orienté P et α un nombre réel.

La rotation de centre O et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

Si $M = O$ alors $M' = O$; Si $M \neq O$ alors $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

On la note $r(O;\alpha)$ ou r. Et on écrit $r(M) = M'$

Ainsi si $M \neq O$ alors : $\boxed{r(M) = N \Leftrightarrow \begin{cases} OM = ON \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}}$ [1]

Remarque 1

La rotation $r(O;-\alpha)$ de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée la **rotation réciproque** de la rotation $r(O;\alpha)$ de centre O et d'angle α

On la note r^{-1} et on a pour tout point N du plan : $\boxed{r^{-1}(N) = M \Leftrightarrow r(M) = N}$ [2]

Exemple 1

ABC un triangle isocèle de sommet A tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) Construire une figure convenable.

2) On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Vérifier que $r(C)=B$.

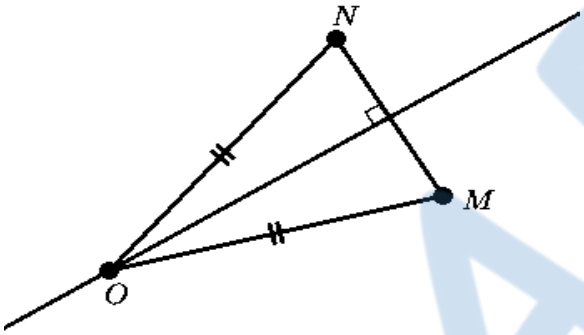
b) Construire le point B' l'image de B par la rotation r.

Remarques 2

1) Si $\alpha\not\equiv 0[2\pi]$ alors :

a) Le centre O de la rotation $r(O;\alpha)$ est l'unique point invariant par cette rotation.

b) Le centre O de la rotation $r(O;\alpha)$ appartient à la médiatrice du segment $[MN]$ ou $r(M)=N$



مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

2) On dit que la rotation r transforme le point M en N si $r(M)=N$

3) Si $\alpha\equiv\pi[2\pi]$ alors la rotation $r(O;\alpha)$ est la symétrie centrale de centre O

2) L'image des figures usuelles par une rotation

A retenir 2

Soit $ABCD$ un quadrilatère dans le plan P.

Soit r une rotation. On pose $r(A)=A'$, $r(B)=B'$, $r(C)=C'$ et $r(D)=D'$.

Figure :	Droite (AB)	Demi-droite $[AB)$	Segment $[AB]$	Cercle de centre A et de rayon R	Triangle ABC	Quadrilatère $ABCD$
Son image par la rotation r	Est la droite $(A'B')$	Est la demi-droite $[A'B')$	Est le segment $[A'B']$	Est le cercle de centre A' et de même rayon R	Est le Triangle $A'B'C'$	Est le quadrilatère $A'B'C'D'$
Expression mathématique de l'image par la rotation r	$r((AB))=(A'B')$	$r([AB))=[A'B')$	$r([AB])=[A'B']$	$r(C(A;R))=C'(A';R)$		
Cas général 3	$r((MN))=(r(M)r(N))$	$r([MN))=[r(M)r(N))$	$r([MN])=[r(M)r(N)]$	$r(C(M;R))=C'(r(M);R)$	L'image du triangle MNE par la rotation r est le triangle $r(M)r(N)r(E)$	L'image du quadrilatère MNEF par la rotation r est le quadrilatère $r(M)r(N)r(E)r(F)$
Conclusion	La rotation conserve la nature des figures géométrique. (C'est-à-dire une figure (ξ) et son image $r((\xi))$ ont la même nature)					

3) Les propriétés d'une rotation

A retenir 3

Soit $r(O;\alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α

Soient (ξ) et (Γ) deux figures du plan

	La rotation conserve :	Signification mathématique
1	La distance	$MN = r(M)r(N)$ [4]
2	La mesure d'un angle orienté	$\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{EF}\right) \equiv \theta[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{r(M)r(N)};\overrightarrow{r(E)r(F)}\right) \equiv \theta[2\pi]$ [5]
3	L'alignement	M, N et E sont alignés $\Rightarrow$ $r(M), r(N)$ et $r(E)$ sont alignés [6]
4	Le coefficient de colinéarité	$MN = k\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{r(M)r(N)} = k\overrightarrow{r(E)r(F)}$ [7]
5	Le barycentre	$G = Bar\{(M;x);(N;y)\} \Rightarrow r(G) = Bar\{(r(M);x);(r(N);y)\}$ [8]
6	Le milieu	I est le milieu du $[MN] \Rightarrow r(I)$ est le milieu du $[r(M)r(N)]$ [9]
7	Le centre de gravité	G est le centre du gravité du triangle $MNE \Rightarrow$ $r(G)$ est le centre du gravité du triangle $r(M)r(N)r(E)$ [10]
8	L'appartenance	$M \in (\xi) \Rightarrow r(M) \in r((\xi))$ [11]
9	L'intersection.	$M = (\xi) \cap (\Gamma) \Rightarrow r(M) = r((\xi)) \cap r((\Gamma))$ [12]
10	Le parallélisme.	$(D) \parallel (\Delta) \Rightarrow r((D)) \parallel r((\Delta))$ [13]
11	L'orthogonalité.	$(D) \perp (\Delta) \Rightarrow r((D)) \perp r((\Delta))$ [14]

Remarques 3

1) A, B, A' et B' quatre points du plan.

Si $A \neq B$ et $A' \neq B'$, Alors il existe une rotation r tel que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

→ Le centre de la rotation r est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$

→ L'angle α de la rotation r est de mesure : $\alpha \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]$

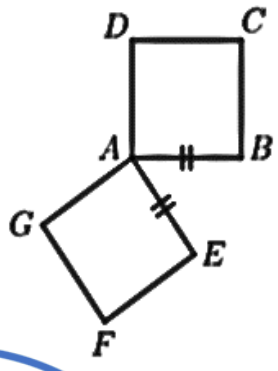
2) Si r est une rotation d'angle α, M et N deux points distincts alors $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{r(M)r(N)}\right) \equiv \alpha[2\pi]$ [15]

3) Si r est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, M et N deux points distincts alors $(MN) \perp (r(M)r(N))$

Exemple 2

Soient $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés tel que $AB = AE$ (Voir la figure ci-contre).

Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



1) Vérifier que $r(D) = B$ et $r(E) = G$.

2) En déduire que $DE = BG$.

3) En déduire que $\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{BG}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(DE) \perp (BG)$

4) Déterminer $r((DE))$ et $r([DE])$.

5) Soit I et J les milieux respectifs des segments $[DE]$ et $[BG]$.

Montrer que $r(I) = J$.

6) Soit (Δ) une droite coupe (DE) en H. On pose $r((\Delta)) = (\Delta')$.

Supposons que (Δ') coupe (BG) en K. Montrer que $r(H) = K$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة

Résumé 8 : Rotation

Définition d'une rotation – rotation réciproque :

→ La rotation $r(O;\alpha)$ de centre O et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

Si $M \neq O$ alors : $\boxed{r(M)=N \Leftrightarrow \begin{cases} OM=ON \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}}$ [1] et on a $r(O)=O$

→ La rotation $r(O;-\alpha)$ de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée la rotation réciproque de la rotation $r(O;\alpha)$ de centre O et d'angle α . On la note r^{-1} et on a pour tout point N du plan : $\boxed{r^{-1}(N)=M \Leftrightarrow r(M)=N}$ [2]

L'image des figures usuelles par une rotation :

Figure :	Droite (MN)	Demi-droite $[MN)$	Segment $[MN]$	Cercle de centre M et de rayon R	Triangle MNE	Quadrilatère $MNEF$
[3] Son image :	$r((MN))=(r(M)r(N))$	$r([MN))=[r(M)r(N))$	$r([MN])=[r(M)r(N)]$	$r(C(M;R))=C'(r(M);R)$	L'image du triangle MNE par la rotation r est le triangle $r(M)r(N)r(E)$	L'image du quadrilatère MNEF par la rotation r est le quadrilatère $r(M)r(N)r(E)r(F)$

Les propriétés d'une rotation :

Soit $r(O;\alpha)$ une rotation, (ξ) et (Γ) deux figures du plan

	La rotation conserve :	Signification mathématique
0	La nature des figures géométrique.	Une figure (ξ) et son image $r((\xi))$ ont la même nature
1	La distance	$MN=r(M)r(N)$ [4]
2	La mesure d'un angle orienté	$\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{EF}\right)\equiv\theta[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{r(M)r(N)};\overrightarrow{r(E)r(F)}\right)\equiv\theta[2\pi]$ [5]
3	L'alignement	M, N et E sont alignés $\Rightarrow$ $r(M)$, $r(N)$ et $r(E)$ sont alignés [6]
4	Le coefficient de colinéarité	$MN=k\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{r(M)r(N)}=k\overrightarrow{r(E)r(F)}$ [7]
5	Le barycentre	$G=Bar\{(M;x);(N;y)\}\Rightarrow r(G)=Bar\{(r(M);x);(r(N);y)\}$ [8]
6	Le milieu	I est le milieu du $[MN]\Rightarrow r(I)$ est le milieu du $[r(M)r(N)]$ [9]
7	Le centre de gravité	G est le centre du gravité du triangle $MNE\Rightarrow$ $r(G)$ est le centre du gravité du triangle $r(M)r(N)r(E)$ [10]
8	L'appartenance	$M\in(\xi)\Rightarrow r(M)\in r((\xi))$ [11]
9	L'intersection.	$M=(\xi)\cap(\Gamma)\Rightarrow r(M)=r((\xi))\cap r((\Gamma))$ [12]
10	Le parallélisme.	$(D)\parallel(\Delta)\Rightarrow r((D))\parallel r((\Delta))$ [13]
11	L'orthogonalité.	$(D)\perp(\Delta)\Rightarrow r((D))\perp r((\Delta))$ [14]

Détermination de l'angle d'une rotation :

Si r est une rotation d'angle α, M et N deux points distincts alors $\boxed{\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{r(M)r(N)}\right)\equiv\alpha[2\pi]}$ [15]

Exercice 1

$ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer $r(A)$ et en déduire $r^{-1}(D)$

2) Déterminer $r^{-1}(C)$ et en déduire $r(D)$

Exercice 2

ABC un triangle. Soit $r(A;\frac{\pi}{2})$

1) Construire les points E et D tels que : $r(B)=E$ et $r(C)=D$

2) Montrer que $(DE)\perp(BC)$

Exercice 3

Soit A, B et C des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

O est le milieu du segment $[BC]$. On pose $r(O;\frac{\pi}{6})$

Soient $A'=r(A)$, $B'=r(B)$ et $C'=r(C)$

1) Montrer que $\overrightarrow{A'B'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A'C'}$

2) Montrer que O est le milieu du segment $[B'C']$

Exercice 4

ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) Déterminer l'angle de la rotation r de centre B et qui transforme A en C

2) Construire le point D l'image de C par la rotation r

3) En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un losange.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré de centre O, on note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]

En choisissant la rotation $r(O;\frac{\pi}{2})$ montrer que $(CI)\perp(DJ)$

Exercice 6

Soit ABC un triangle, on construit à son extérieur les points D et E tels que ABD et ACE soient des triangles rectangles et isocèles de sommet A

En utilisant une rotation convenable montrer que $CD=EB$

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Déterminer le centre et l'angle de la rotation r tel que $r(C)=A$ et $r(A)=B$

Exercice 7

ABC un triangle tel que $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $CB=CA$

Soit I le milieu de segment $[AB]$ et E un point tel que C est le milieu de segment $[BE]$.

On considère la rotation $r(I;\frac{\pi}{2})$.

1) Construire une figure convenable et montrer que $r(A)=C$ et $r(C)=B$

2) Construire le point F tel que $F=r(E)$

3) Déterminer $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})$ et déduire que $(\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BC})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

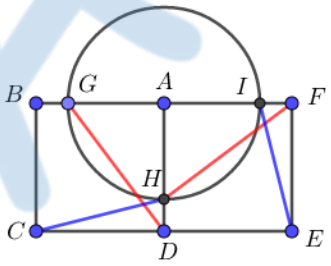
4) Montrer que $BF=CA$

5) Montrer que $AE=AB$ puis $CF=AB$

6) En déduire la nature du quadrilatère $ACFB$.

Exercice 8

$ABCD$ et $ADEF$ deux carrés (Voir la figure ci-contre)



Correction

Soit G un point sur le segment $[AB]$

Soit (Γ) le cercle de centre A et passant par G

Le cercle (Γ) coupe les segments $[AD]$ et $[AF]$ respectivement en H et I.

En utilisant une rotation convenable montrer que $DG=HF$ et $CH=EI$

Exercice 9

ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit r la rotation qui transforme A en B et B en C

1) Déterminer α l'angle de la rotation r (on rappelle que $(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{v})\equiv\pi+(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})[2\pi]$)

2) Déterminer O le centre de la rotation r

Exercice 11

Soit $ABCD$ un carré tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I un point du segment $[BD]$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I et de rayon IA.

Le cercle $(\mathcal{C})$ coupe la droite (AB) en J et (AD) en K.

1) Montrer que $C\in(\mathcal{C})$ et que $\hat{KIC}=2\hat{CAK}$

2) En déduire que $(CI)\perp(JK)$ et que $CK=CJ$

3) En utilisant une rotation convenable m.q $DK=BJ$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL4

1BACSEF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Limite d'une fonction)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{-2x^2+3x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-5x^3-x^5-3$; $\lim\limits_{x\to-1}x^2+3x^5-4$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}$

$\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{3x-2}-x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}-2}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin(9x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{tan(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin(9x)}{tan(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos(x)}{sin^2(x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-cos(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-cos(\dfrac{2}{x})\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times tan(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}tan(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-6x-2}+x+12$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-7x+9}+8x-4$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-4x}-3x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+sin(x)}{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2x}{\sqrt{x^2-x}+x}$

Exercice 2 (Rotation)

$ABCD$ un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

I et J deux points tels que $\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Les droites (IC) et (JD) coupent respectivement (BD) et (AC) en M et N.

Correction

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1) Construire une figure et déterminer $r(A), r(B), r(C)$ et $r(D)$.

2) a) Montrer que $I=bar\{(A;1);(B;-3)\}$ et $J=bar\{(B;1);(C;-3)\}$

b) En déduire que $r(I)=J$.

3) a) Déterminer l'image de chacune des droites (BD) et (IC) par la rotation r.

b) En déduire que $r(M)=N$.

c) En déduire que $IM=JN$.

4) Montrer que $(CM)\perp(DN)$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS4

1BSEF-A
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Les calculatrices sont autorisées.**
- **Toute réponse non justifiée est considérée comme incomplète.**
- **La correction retiendra la bonne présentation des copies de rédaction.**

Exercice 1 (10pts)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} 4x^3+2x^4-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{x^2-8x+1}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2+x-12}{-x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{3-\sqrt{4x+5}}$ ..... $4\times 0.5pt$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+2x^2+x-12}{-x^2-5x-6}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tan(9x)}{7x}$; $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+4}{x^2-5x-14}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3+6x^2+3x+1$ ..... $4\times 0.5pt$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\times sin(\dfrac{7}{x^2})$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos^3(x)-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-1}{x-x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{9x^2+8x-1}$ ..... $4\times 0.5pt$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{sin(x)}{x^2+5}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sin(2x)}{\sqrt{1-cos(x)}}$ ..... $2\times 0.5pt$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{sin(x)-\sqrt{3}cos(x)}{6x-2\pi}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi-x}{cos(x)+1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3x-2}+1}{x-\sqrt{x-1}-1}$ ..... $3\times 1pt$

Exercice 2 (10pts)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit O le milieu du segment $[BC]$.

E et F les points tel que OEF soit un triangle rectangle et isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Montrer que $(AO)\perp(BC)$ et $OA=OC$ ..... $1.5pt$

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a) Montrer que $r(C)=A$, $r(A)=B$ et $r(E)=F$ ..... $1.5pt$

b) En déduire que $EC=AF$ et $(CE)\perp(AF)$. ..... $2pt$

3) Soit I et J les milieux respectifs des segments $[EC]$et $[AF]$.

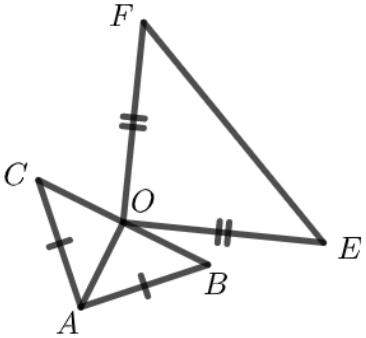
Montrer que $r(I)=J$. ..... $2pt$

4) On pose $M=(OE)\cap(AC)$et $N=(OF)\cap(AB)$

a) Montrer que $r(M)=N$. ..... $1pt$

b) En déduire la nature du triangle OMN ..... $1pt$

5) Soit K un point de la droite (ME). Déterminer $r((EK))$. ..... $1pt$



الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS4

1BSEF-B
2 heures
Aissa HIYAB

Note :

- **Les calculatrices sont autorisées.**
- **Toute réponse non justifiée est considérée comme incomplète.**
- **La correction retiendra la bonne présentation des copies de rédaction.**

Exercice 1 (10pts)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3+2x^4-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{9x^2-8x+1}$; $\lim\limits_{x\to1} -2x^3+6x^2+3x+1$; $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-5x-6}{x^3+2x^2+x-12}$ ..... $4\times0.5pt$

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x-4}{x^2-5x-14}$; $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2+x-12}$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3-\sqrt{4x+5}}{2-\sqrt{3x+1}}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan(7x)}{9x}$ ..... $4\times0.5pt$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+\sqrt{x^2+8x-1}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos^3(x)-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(x)}{x^2+6}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$ ..... $4\times0.5pt$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{-x^4-x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\times\sin(\dfrac{3}{x^2})$ ..... $2\times0.5pt$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{6x-2\pi}$; $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x-\pi}{1+\cos(x)}$; $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}-1}{x-\sqrt{x-1}-1}$ ..... $3\times1pt$

Exercice 2 (10pts)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit O le milieu du segment $[AC]$.

E et F les points tel que OEF soit un triangle rectangle et isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OE}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Montrer que $(BO)\perp(AC)$ et $OB=OA$ ..... $1.5pt$

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a) Montrer que $r(A)=B$, $r(B)=C$ et $r(F)=E$ ..... $1.5pt$

b) En déduire que $FA=BE$ et $(AF)\perp(BE)$. ..... $2pt$

3) Soit I et J les milieux respectifs des segments $[FA]$et $[BE]$.

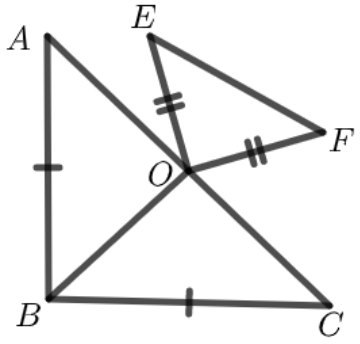
Montrer que $r(I)=J$. ..... $2pt$

4) On pose $M=(OF)\cap(BA)$et $N=(OE)\cap(BC)$

a) Montrer que $r(M)=N$. ..... $1pt$

b) En déduire la nature du triangle OMN ..... $1pt$

5) Soit K un point de la droite (MF). Déterminer $r((FK))$. ..... $1pt$



مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

09

Dérivation

HIYAB

1) Dérivabilité d'une fonction en un point

Activité 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-3}=6$

On dit que f est **dérivable** en 3

Le nombre 6 est appelé le **nombre dérivé** de f en 3 on le note $f'(3)$ et on écrit $f'(3)=6$

2) En déduire que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=6$

3) Montrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$

Définition 1

Soit f une fonction definie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

On dit que f est **derivable** en a, s'il existe un nombre réel l tel que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

Le réel l est appelé **le nombre dérivé** de f en a , on le note $f'(a)$ et on écrit $f'(a)=l$

Remarque 1

Si on pose $h=x-a$ alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ est équivalent à $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$.

Application 1

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2$ et $a=4$.

2) $f(x)=sin(2x)$ et $a=0$.

3) $f(x)=2x^2-7x+7$ et $a=2$.

4) $f(x)=cos(x)$ et $a=0$.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

2) Interprétation géométrique du nombre dérivé

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en a et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

On appelle tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

L'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

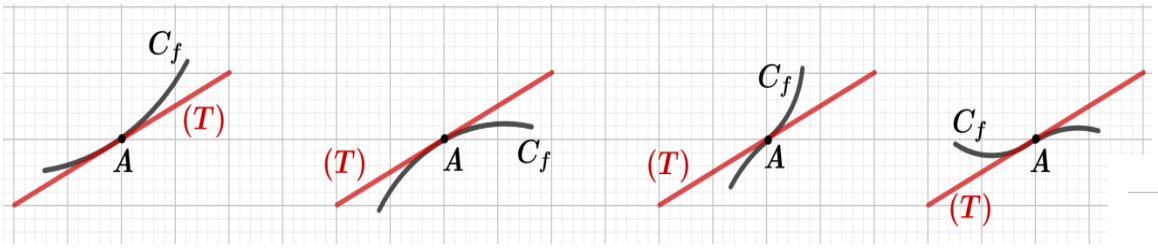
Application 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x+3}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1 .

Remarques 2

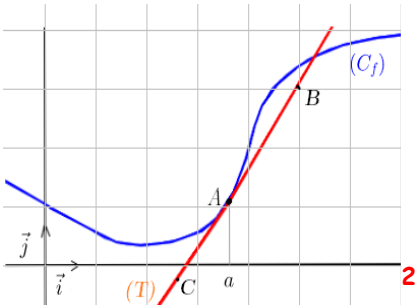
- La tangente en un point de la courbe permet de déterminer la position de la dernière au voisinage de ce point.
- Les quatre positions possibles de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point $A(x_0;f(x_0))$.



- Soit f une fonction dérivable en a et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe

Soit (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a

Si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$ alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.



3) Approximation affine d'une fonction

Définition 2 et Propriété 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f est dérivable en a, alors il existe une fonction φ definie sur $I-\{a\}$ tel que $f(x)=f'(a)(x-a)+f(a)+(x-a)\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$
- La fonction affine g définie par $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ est appelée **l'approximation affine** de f au voisinage de a.
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h)\simeq g(h)$

Application 3

On considère la fonction f tel que : $f(x)=(1+x)^2$.

1) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$

2) Déterminer la fonction g l'approximation affine de f au voisinage de zéro.

3) a) Vérifier que $(1,0001)^2=f(0,0001)$ et $(1,009)^2=f(0,009)$

b) En déduire une valeur approchée des nombres $(1,0001)^2$ et $(1,009)^2$

4) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro on a : $(1+h)^2\simeq 1+2h$

4) Dérivabilité à droite et à gauche

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;b[$.

- On dit que f est dérivable à droite en a, si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ finie.Cette limite est notée $f'_d(a)$ et est appelée **le nombre dérivé de f à à droite** en a.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b;a]$.

On dit que f est dérivable à gauche en a, si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ finie .Cette limite est notée $f'_g(a)$ et est appelée **le nombre dérivé de f à gauche** en a.

Application 4

Etudier la dérivabilité de la fonction f en à droite et à gauche en a dans les cas suivants :

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & si\ \ x\geq 4\\ x^2+3 & si\ \ x<4\end{cases}$ et $a=4$.

2) $f(x)=|x-3|$ et $a=3$.

Propriété 3

Une fonction f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$.

Application 5

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas de l'application précédent :

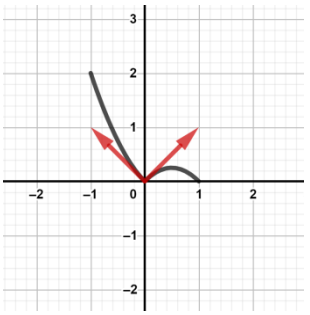
1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & si\ \ x\geq 4\\ x^2+3 & si\ \ x<4\end{cases}$ et $a=4$.

2) $f(x)=|x-3|$ et $a=3$.

Interprétation géométrique :

- Si f est dérivable à droite en a alors la courbe représentative de f admet au point $A(a,f(a))$ une demi-tangente d'équation : $\begin{cases}y=f'_d(a)(x-a)+f(a)\\ x\geq a\end{cases}$.
- Si f est dérivable à gauche en a alors la courbereprésentative de f admet au point $A(a,f(a))$ une demi-tangente d'équation : $\begin{cases}y=f'_g(a)(x-a)+f(a)\\ x\leq a\end{cases}$

Exemple 1



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f:x\mapsto|x^2-x|$.

- On a $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-x}{x}=-1$. D'où f est dérivable à gauche en 0 e $f'_g(0)=-1$

Ainsi la courbe representative de f admet au point O à gauche la demi-tangente d'équation $\begin{cases}y=-x\\x\le0\end{cases}$.

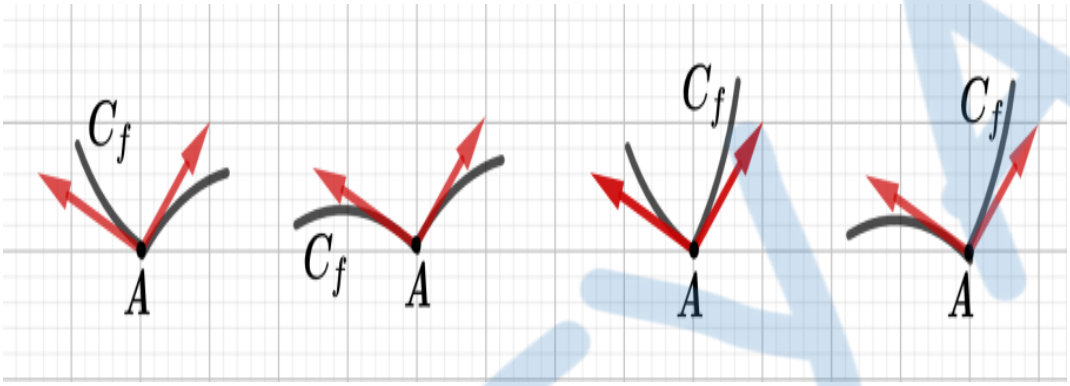
- On a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^2+x}{x}=1$. D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$

Ainsi la courbe representative de f admet au point O à droite la demi-tangente d'équation $\begin{cases}y=x\\x\ge0\end{cases}$.

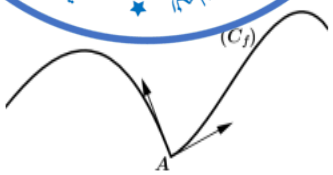
On remarque que $f'_g(0)\neq f'_d(0)$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point 0.

Remarques 3

- Les demi-tangentes en un point de la courbe permet de déterminer la position de la dernière au voisinage de ce point.
- Les quatre positions possibles de la courbe par rapport aux demi- tangentes au voisinage du point $A(x_0;f(x_0))$:



- Si $(\mathcal{C}_f)$ admet en un point A deux demi- tangentes de directions différentes, alors A est dit : **point anguleux**



Application 6

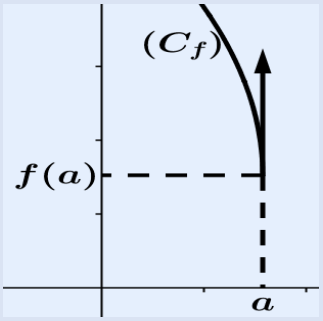
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f:x\mapsto|x+1|^3$.

Donner les équations des demi-tangentes à la courbe de la fonction f au point $A(-1,0)$.

Propriété 3

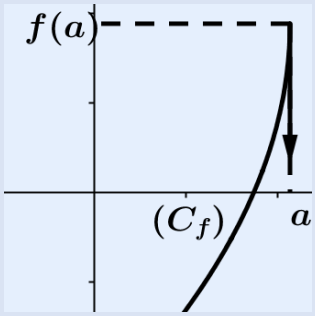
Si la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie lorsque x tend vers a^+ ou x tend vers a^- alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse a un demi tangent d'équation : $x=a$ (parallèle à l'axe des ordonnées) :

Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$



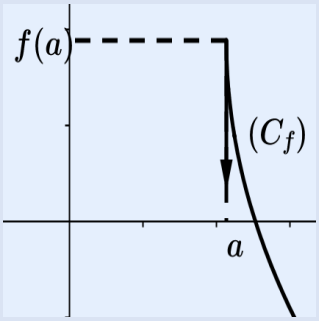
Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente dirigée vers le haut.

Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$



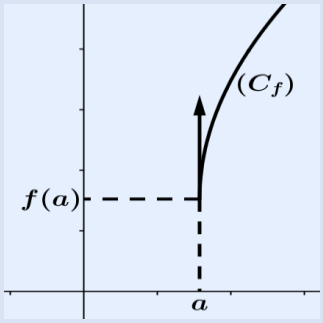
Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente dirigée vers le bas.

Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$



Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente dirigée vers le bas.

Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$



Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente dirigée vers le haut.

5) Dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée

Activité 2

On considère la fonction f tel que : $f(x)=\sqrt{x}$.

1) Déterminer D_f et montrer que f est n'est pas dérivable à droite en 0.

2) Soit $t\in]0;+\infty[$, montrer que f est dérivable en t et que $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

Définition 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I.

On dit que f est **dérivable sur l'intervalle** I, si elle est dérivable en tout point de I.

Remarques 4

Soit f une fonction numérique.

- On dit que f est dérivable sur un intervalle $]a,b[$ lorsque f est dérivable en tout réel de $]a,b[$.
- On dit que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à droite en a.
- On dit que f est dérivable sur $]a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à gauche en b.
- On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b. (a et b peuvent être finis ou infinis).

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle **fonction dérivée** de f et on note f', la fonction qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Exemple 2

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3$.

Soit t un nombre réel, on a $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=\dfrac{x^3-t^3}{x-t}=\dfrac{(x-t)(x^2+xt+t^2)}{x-t}=x^2+xt+t^2$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to t}\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim\limits_{x\to t}x^2+xt+t^2=t^2+t.t+t^2=3t^2$.

Alors f est dérivable en tout point t de $\mathbb{R}$ et on a la fonction définie par $f'(t)=3t^2$ est la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Propriété 4 : Dérivées des fonctions usuelles

a, b et c des nombres réels et $n\in\mathbb{N}^*$.

$f(x)$	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$	Ecriture mathématique
c	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$(c)'=0$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	$(ax+b)'=a$
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(x^n)'=nx^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	IR*	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	IR*	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$	$(cos(x))'=-sin(x)$
$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$(sin(x))'=cos(x)$
$tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\right\}$	Tout intervalle de type : $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $k\in\mathbb{Z}$	$1+tan^2(x)$	$(tan(x))'=1+tan^2(x)$

$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-a\times sin(ax+b)$	$(cos(ax+b))'=-a\times sin(ax+b)$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\times cos(ax+b)$	$(sin(ax+b))'=a\times cos(ax+b)$

Application 7

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=x^5$; $f(x)=x^{2026}$; $f(x)=\dfrac{1}{x^9}$; $f(x)=-5x+3$; $f(x)=x-2$; $f(x)=sin(-5x+3)$

6) Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 5

u et v deux fonctions définies sur un intervalle I, et soit α un réel fixé et $n\in\mathbb{N}^*$.

Fonction	Fonction dérivée	Conditions	Ecriture mathématique :
$u+v$	$u'+v'$	• u et v dérivables sur I	$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$
$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$	• u et v dérivables sur I	$(u(x)\times v(x))'=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
$\alpha\times u$	$\alpha\times u'$	• u et v dérivables sur I	$(\alpha\times u(x))'=\alpha\times u'(x)$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	• u dérivable sur I • $(\forall x\in I)\quad u(x)\neq 0$	$\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)'=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	• u et v dérivables sur I • $(\forall x\in I)\quad v(x)\neq 0$	$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	• u dérivable sur I $(\forall x\in I)\quad u(x)>0$	$\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
u^n	$n\times u'\times u^{n-1}$	• u dérivable sur I	$\left(u^n(x)\right)'=n\times u'(x)\times u^{n-1}(x)$

Remarque 5

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors on écrit : $(\forall x\in I)\quad f'(x)=(f(x))'$.

Exemple 3

Soit h est la fonction définie sur $I=\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$.

h est la somme de deux fonctions $x\to x^4$ et $x\to x^2$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors h est derivable sur $\mathbb{R}$ et :

$(\forall x\in\mathbb{R})$, $h'(x)=\left(x^4+x^2\right)'=\left(x^4\right)'+\left(x^2\right)'=4x^3+2x$.

Application 8

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants

$f(x)=\sqrt{x}+x^5$; $f(x)=x^6\times cos(x)$; $f(x)=3\times sin(x)$; $f(x)=(2x+3)^8$

$f(x)=\left(2x^2+3x+1\right)^4$; $f(x)=\dfrac{1}{tan(x)}$; $f(x)=\dfrac{3x+6}{4x+7}$; $f(x)=\sqrt{x^7\times sin(x)}$

Propriété 6

- Si f est une fonction polynôme alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.

Remarque 6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a\in I$

Il existe donc 3 méthodes pour calculer $f'(a)$

Méthode 1 : Si on a calculé $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on remplace x par a dans l'expression de $f'(x)$

Méthode 2 : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Méthode 3 : Si (T) est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse a, $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$

Alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Application 9

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^{20}-2^{20}}{x-2}\ ;\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-1}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\cos(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}\ ;\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{2\sin(x)-\sqrt{2}}{4x-\pi}$$

7) Dérivées successives

Définition 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si la fonction f' est aussi dérivable sur I,on dit que f est deux fois dérivable sur I, sa dérivée est appelée la **dérivée seconde** de f et notée f'' ou $f^{(2)}$

On écrit : $(\forall x\in I)\quad f''(x)=(f'(x))'$.

Remarques 7

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ (avec $n\geq 3$)est dérivable sur I, sa fonction est appelée dérivée $n^{ème}$ de f et notée $f^{(n)}$.
- La dérivée $n^{ème}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f.
- Si $y=f(x)$, alors on écrit $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ ou $dy=f'(x)dx$ .Cette écriture est appelée : écriture différentielle.

Exemple 4

Soit f la fonction définie par $f:x\mapsto x^3-4x^2+x+5$.

- On a f est plynoôme, f est alors derivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3x^2-8x+1$.
- f' est polynôme , d'où elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x)=6x-8$.
- f'' est polynôme , d'où elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(3)}(x)=6$.
- $f^{(3)}$ est constante , d'où elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(4)}(x)=0$.
- Pour tout entier $n\geq 4$, $f^{(n)}(x)=0$.

Application 10

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. Calculer la dérivée d'ordre 3 de la fonction f.

2) On considère la fonction $\cos$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer les dérivées successives $\cos'$, $\cos''$, $\cos^{(3)}$.

b) Conjecturer l'expression de $\cos^{(n)}(x)$ pour tout entier $n\geq 1$.

8) Dérivée et sens de variations

Activité 3

On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2) Déterminer $D_{f'}$ l'ensemble de dérivabilité de f

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_{f'}$

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2

Propriété 7

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  - f est croissante sur I si et seulement si $f'(x)\geq 0$ pour tout x de I.
  - f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x)\leq 0$ pour tout x de I.
  - f est constante sur I si et seulement si $f'(x)=0$ pour tout x de I.

- Si f est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini ou infini de points isolés, alors f est strictement croissante sur I
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini ou infini de points isolés, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarques 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Application 11

On considère la fonction f tel que : $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 1$.

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2) Déterminer $D_{f'}$ l'ensemble de dérivabilité de f
2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f
3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$
4) Dresser le tableau de variations de f.
5) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2

المادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

9) Dérivée et extremums

Activité 4

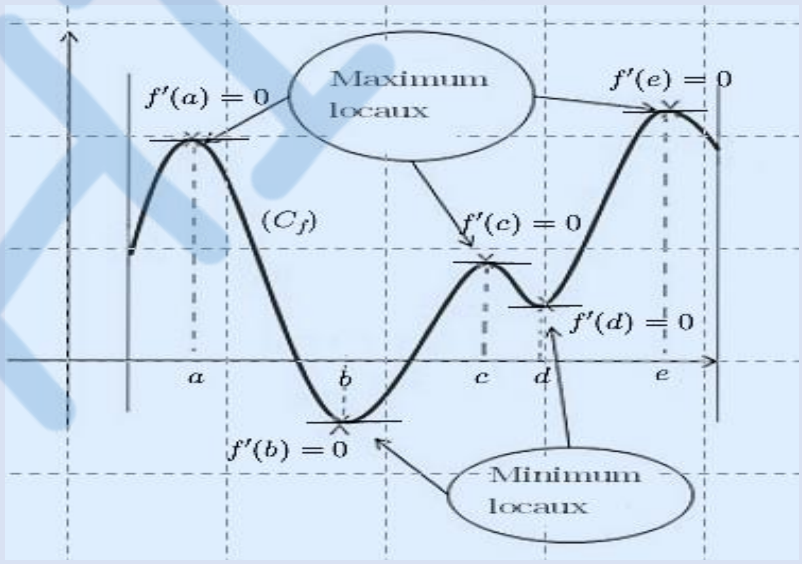
On considère la fonction f tel que : $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

1) Etudier les variations de f.
2) En déduire que f admet un extremum à préciser.
3) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \geq 4$

Propriétés 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

- Si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a, alors $f'(a) = 0$
- Si f admet un extremum local en a, alors la tangente à (C_f) au point $A(a, f(a))$ est horizontale.



- Si $f'(a) = 0$ et f' change de signe au voisinage de a, alors $f(a)$ est un extremum local de f.
- $f(a)$ est la valeur maximale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(a)$
- $f(a)$ est la valeur minimale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(a)$

Remarque 9 :

La réciproque de la propriété 8 est fausse.

Exemple : la fonction définie par $f(x) = (x-1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(1) = 0$ mais $f(1)$ n'est pas un extremum local de f.

Application 12

1) Montrer que la fonction g definie par $g(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$, admet une valeur maximale globale à déterminer.

2) Déterminer les extremums locaux de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^3+3x^2$.

10) Équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$

Activité 5

Soit f la fonction définie par $f(x)=cos(3x)$. Vérifier que $f''(x)+9f(x)=0$

Définition 7 et Propriété 9

- Une **équation différentielle** est une équation entre une fonction f et ses dérivées dont la fonction f est l'inconnue.

On note en général la fonction f par y et ses dérivées par y', y'', $y^{(3)}$....

- Soit ω un nombre réel non nul, les solutions de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ sont les fonctions y tel que $y(x)=acos(\omega x)+bsin(\omega x)$ avec a et b sont des constantes réelles.

Application 13

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1): $y''+4y=0$; (E_2): $y''+9y=0$

(E_3): $y''+5y=0$; (E_4): $2y''+16y=0$

2) Déterminer la solution de l'équation différentielle (E_5): $y''+16y=0$ telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$

Remarques 10

Soit ω un nombre réel non nul et $x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

- L'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ admet un unique solution y tel que $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y_1$
- Les solutions de $y''=0$ sont les fonctions affines $x \mapsto ax+b$ tel que $a;b \in IR$

Résumé 9 : Dérivation

Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable en a et $f'(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à droite en a et $f'_d(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$; $x\geq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à gauche en a et $f'_g(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$; $x\leq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$	f n'est pas dérivable en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$

Fonction dérivée des fonctions usuelles - Opérations sur les fonctions dérivée :

$(c)'=0$ $(ax)'=a$ $(ax+b)'=a$ $(x)'=1$	$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(u^n)'=n\times u'\times u^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ $(\alpha\times u)'=\alpha\times u'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$(cos(x))'=-sin(x)$ $(cos(ax+b))'=-a\times sin(ax+b)$	$(sin(x))'=cos(x)$ $(sin(ax+b))'=a\times cos(ax+b)$	$(tan(x))'=1+tan^2(x)$			

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a\in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer $f'(a)$

Méthode 1 : Si on a calculé $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on remplace x par a dans l'expression de $f'(x)$

Méthode 2 : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Méthode 3 : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a :

Si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$, alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Dérivée et sens de variations :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- $(\forall x\in I)\ f'(x)\geq 0\Leftrightarrow$ f est croissante sur I.
- $(\forall x\in I)\ f'(x)\leq 0\Leftrightarrow$ f est décroissante sur I.
- $(\forall x\in I)\ f'(x)=0\Leftrightarrow$ f est constante sur I.

Dérivée et extremums :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

- $f'(a)=0$ et f' change de signe au voisinage de $a\Rightarrow$ $f(a)$ est un extremum de f
- $f(a)$ est un extremum de $f\Rightarrow f'(a)=0$
- $f(a)$ est un extremum de $f\Rightarrow$ la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a est horizontale.
- (T) est horizontale $\Leftrightarrow f'(a)=0$
- $f(a)$ est la valeur maximale de f sur $I\Leftrightarrow(\forall x\in I)\quad f(x)\leq f(a)$
- $f(a)$ est la valeur minimale de f sur $I\Leftrightarrow(\forall x\in I)\quad f(x)\geq f(a)$

Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a.

- La fonction g tel que $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a.
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h)\simeq g(h)$

Equations différentielles de type : $y''+\omega^2y=0$

Soit ω un nombre réel non nul, les solutions de l'équation différentielle $y''+\omega^2y=0$ sont les fonctions y tel que $y(x)=acos(\omega x)+bsin(\omega x)$ avec a et b sont des constantes réelles.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exercice 1 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a et interpréter les résultats obtenus dans les cas suivants :

1) $f(x)=5x+2$ et $a=1$.

2) $f(x)=\sqrt{3x-2}$ et $a=2$.

3) $\begin{cases} f(x)=1-cos(x) & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=sin(x) & si \quad x<0 \end{cases}$ et $a=0$.

4) $f(x)=x^3$ et $a=-1$.

Exercice 2 :

1) On considère la fonction f tel que : $f(x)=(1+x)^3$.
Donner l'approximation affine de f au voisinage de zéro et en déduire une valeur approchée de nombre $b=(1.0044)^3$

2) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro on a :
$\frac{1}{1+h}\simeq 1-h$ et $\sqrt{1+h}\simeq 1+\frac{h}{2}$.

Exercice 3 :

Préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ lorsqu'il existe dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3-5x^2+7x+3$ 2) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$

3) $f(x)=\sqrt{x+5}$ 4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

5) $f(x)=x^2\sqrt{x}-1$ 6) $f(x)=2+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^3}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x)=4\sqrt{x+1} & si \quad x\geq 3 \\ f(x)=x^2-5x+c & si \quad x<3 \end{cases}$

1) Déterminer le réel c pour que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

2) Pour la valeur de c trouvée, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 5 :

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-2)^{2024}-1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x\sqrt{x+7}-6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{1}{x+2}-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2cos(x)-1}{tan(x)-\sqrt{3}}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que f possède deux extremums locaux dont on précisera la nature et l'intervalle.

Exercice 7 :

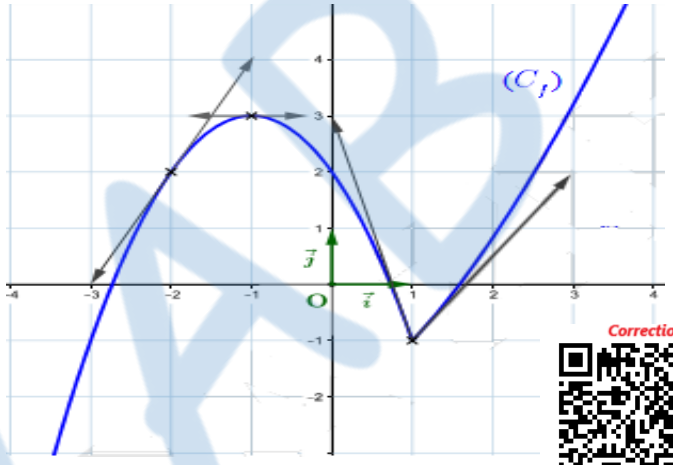
Dresser le tableau de variations de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 2) $f(x)=3x^4-2x^2+1$

3) $f(x)=\frac{4}{x^2-2x}$ 4) $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x+1}$

Exercice 8

Dans la figure ci-après $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Correction

1) Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$

2) Déterminer graphiquement $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$

3) En déduire que f n'est pas dérivable en 1.

4) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3;3]$ (on donne $f(3)=\frac{25}{8}$)

5) En déduire le tableau de signe de f' sur $[-3;3]$

Exercice 9 :

b et c deux nombres réels strictement positifs.
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=x^3+b^3+c^3-3xbc$.

1) Vérifier que : $f(\sqrt{bc})=(\sqrt{b^3}-\sqrt{c^3})^2$

2) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[) \quad f(x)=3(x+\sqrt{bc})(x-\sqrt{bc})$

3) Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f

4) En déduire que f admet une valeur minimale positive sur $\mathbb{R}_+^*$

5) Déduire que : $(\forall a;b;c\in]0;+\infty[) \quad a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

Exercice 10 :

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : Sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm², les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et de 2 cm sur les bords verticaux.
Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

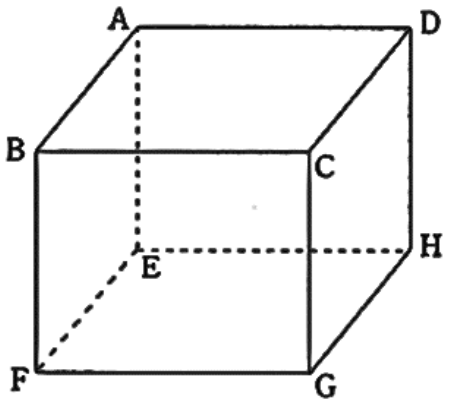
10
Vecteurs de l'espace

HIYAB

Rappel

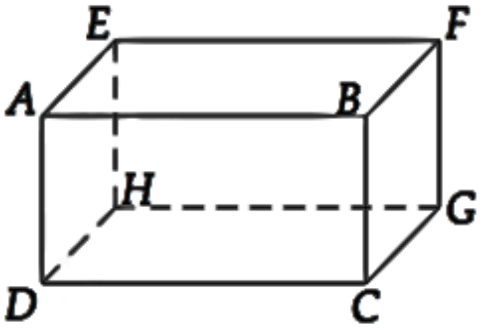
1) Le nombre de faces et de sommets de quelques solides de l'espace

Cube



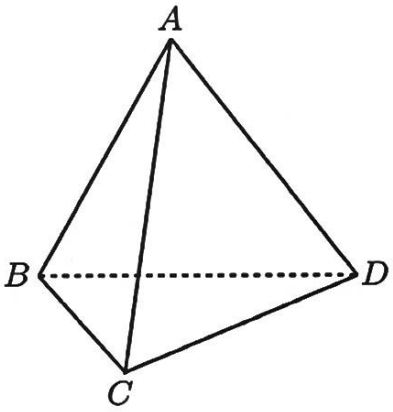
Nombres de faces : 6
Nombres de sommets : 8

Parallélépipède rectangle



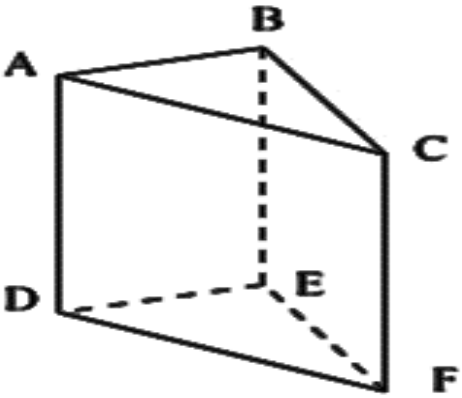
Nombres de faces : 6
Nombres de sommets : 8

Tétraèdre



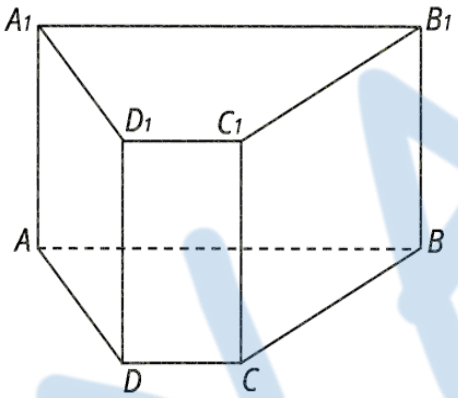
Nombres de faces : 4
Nombres de sommets : 4

Prisme droit à base triangulaire



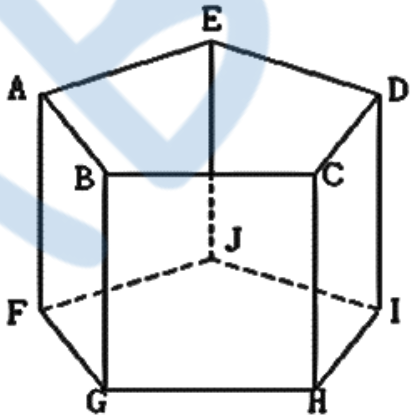
Nombres de faces : 5
Nombres de sommets : 6

Prisme droit à base rectangle



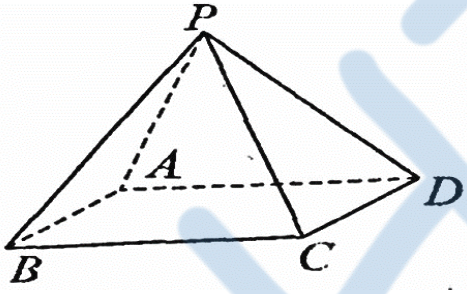
Nombres de faces : 6
Nombres de sommets : 8

Prisme droit à base pentagone



Nombres de faces : 7
Nombres de sommets : 10

Pyramide



Nombres de faces : 5
Nombres de sommets : 5

Cube	مكعب
Parallélépipède	متوازي المستطيلات
Tétraèdre	رباعي أوجه
Prisme	موشور
Pyramide	هرم

2) Perspective cavalière

La perspective cavalière est une manière de représenter sur un plan des solides de l'espace.

Pour tracer un solide dans un plan, on peut utiliser une représentation en perspective cavalière :

- La face avant est représentée en vraie grandeur.
- Les arêtes parallèles sont représentés par des segments parallèles.
- Les arêtes cachées sont dessinées en pointillés.

1) Le vecteur dans l'espace

On étend la notion de vecteur dans le plan à l'espace.

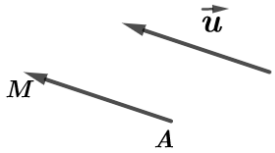
Vecteurs -égalité de deux vecteurs dans l'espace

➢ Chaque deux points différents A et B de l'espace représentent un vecteur de l'espace, noté $\overrightarrow{AB}$ et défini par :

• une direction (la droite (AB)) • un sens (de A vers B) • une norme ou distance notée : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

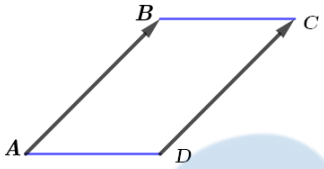
➢ Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé : le vecteur nul, noté par $\vec{0}$.

- Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si elles ont la même direction, le même sens et la même norme.
- Pour tout point A et vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AM}$



- Le vecteur $-\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $\vec{u}$ (ils ont la même direction et la même norme mais sont de sens opposés)
- On dit que deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

- Soit $ABCD$ un quadrilatère de l'espace,
  $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.

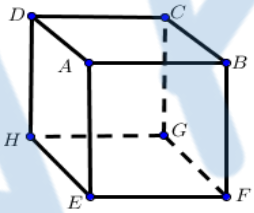


L'addition et la multiplication par un réel :

- Comme l'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des vecteurs de l'espace est muni de deux opérations : l'addition (relation de Chasles et la règle du parallélogramme) et la multiplication par un réel.
- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et les nombres réels a et b, on a :
  - $1\vec{u}=\vec{u}$
  - $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$
  - $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$
  - $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$
  - $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace et pour tout nombre réel α, on a : $\alpha\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à ($\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$).

Exemple 1 :

Dans la figure ci-contre $ABCDEFGH$ est un cube.



1) Simplifier $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$; $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{HG}$; $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{CB}$;
   $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{DH}$

2) Construire les points M et P tels que :
   $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Remarque 1 :

Tous les résultats de la géométrie plane (Théorème de Pythagore, théorème de Thalès, théorème des milieux, etc.…) sont applicables dans chaque plan de l'espace.

2) Vecteurs colinéaires-Points alignés

Vecteurs colinéaires

- **Définition 1 :**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls dans l'espace sont dites colinéaires, s'ils ont la même direction.

- **Propriété 1 :**

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans l'espace, si et seulement s'il existe un réel α tel que : $\vec{u}=\alpha\vec{v}$

- **Remarque 2**
  - $(AB)//(CD)\Leftrightarrow$ Il existe un réel α tel que : $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$
  - Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

Points alignés

Soit A, B et C trois points de l'espace.

- **Définition 2 :**

Les points A, B et C sont alignés, (appartient au même droite) s'il existe une droite (Δ) tel que :
$A\in(\Delta)$, $B\in(\Delta)$ et $C\in(\Delta)$

- **Propriété 2 :**

Les points A, B et C sont alignés, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
(C'est-à-dire s'il existe un réel α tel que : $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$)

Droite parallèle à un plan

Soit (D) une droite et (P) un plan de l'espace.

➢ **Définition 3 : Droite incluse dans un plan**

On dit que la droite (D) est incluse dans le plan (P) et on écrit $(D)\subset(P)$ s'il existe deux points distincts de (D) appartiennent au plan (P).

➢ **Cas particulier**

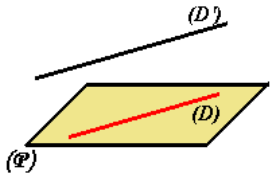
A et B sont deux points distincts de l'espace :

Pour montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan (P) il suffit de montrer que $A\in(P)$ et $B\in(P)$

➢ **Propriété 3 :**

Une droite (D') est parallèle au plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite (D) incluse dans (P). On écrit $(D')//(P)$

$$(D')//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}(D')//(D)\\(D)\subset(P)\end{cases}$$



➢ **Remarque 3**

- Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles.
- Deux droites orthogonales dans l'espace ne sont pas nécessairement perpendiculaires.

Exemple 2 :

1) Dessiner un cube $ABCDEFGH$, puis placer le point J tel que $\overrightarrow{EJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et le point I tel que $\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{EF}$

2) Soit K le point tel que $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}$. Montrer que la droite (EI) est parallèle à la droite (AK).

3) Soient M et N les points tels que $EFIJABMN$ soit un parallélépipède. Montrer que les points A, C et N sont alignés.

4) Construire les droites $D_1(A;\overrightarrow{DA})$; $D_2(K;\overrightarrow{BC})$; $D_3(E;\overrightarrow{JI})$

Définition vectorielle d'une droite de l'espace :

➢ **Rappel :**

1) Toute droite de l'espace est définie par un point et un vecteur directeur.

2) Tous deux points distincts A et B de l'espace définissent une unique droite notée (AB).

➢ **Propriété 4 :**

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

(C'est-à-dire $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ avec $t\in\mathbb{R}$), on le note par : $D\left(A;\vec{u}\right)$

$M\in D\left(A;\vec{u}\right)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\quad\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

3) Vecteurs coplanaires-Points coplanaires

Vecteurs d'un plan

Soit (P) un plan de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a :

$\vec{u}\in(P)\Leftrightarrow\exists A,B\in(P)\quad\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

$\vec{u}\in(P)$ et $\vec{v}\in(P)\Leftrightarrow\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\in(P)$

$\vec{u}\in(P)\Leftrightarrow(\forall k\in\mathbb{R})\quad\left(k\vec{u}\right)\in(P)$

Vecteurs coplanaires

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

➢ **Définition 4 :**

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, (appartient au même plan) s'il existe un plan (P) tel que $\vec{u}\in(P)$, $\vec{v}\in(P)$ et $\vec{w}\in(P)$

➢ **Propriété 5 :**

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, si et seulement s'il existe deux réels α et β tel que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

On dit, dans ce cas, que le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Points coplanaires

Soit A,B,C et D quatre points de l'espace.

➢ **Définition 5 :**

Les points A,B,C et D sont coplanaires, (appartient au même plan) s'il existe un plan (P) tel que :

$A\in(P)$, $B\in(P)$, $C\in(P)$ et $D\in(P)$

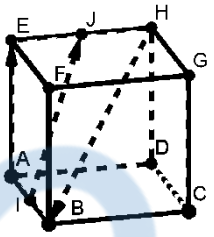
➢ **Propriété 6 :**

Les points A,B,C et D sont coplanaires, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

(C'est-à-dire s'il existe deux réels α et β tel que : $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$)

Exemple 3 :

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[EH]$



1) Vérifier que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ}$

2) En déduire que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

3) Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$

4) Que peut-on dire sur les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$?

Exemple 4 :

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires et T le point tel que $2\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}$

Montrer que les points A, C, D et T sont coplanaires.

Définition vectorielle d'un plan de l'espace :

➢ **Remarque 4 :** Tout plan de l'espace peut être défini par :

1) Trois points A, B et C non alignés. (On le note par (ABC)).

Il est clair qu'on a $A\in(ABC)$, $B\in(ABC)$ et $C\in(ABC)$

Pour tout point M on a : $M\in(ABC)\Leftrightarrow\exists\alpha;\beta\in\mathbb{R}\quad\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

2) Deux droites sécantes ou strictement parallèles.

3) Un point et deux vecteurs non colinéaires (sont dites vecteurs directeurs de ce plan).

➢ **Propriété 7 :**

Soit A un point et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

(C'est-à-dire $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ avec $\alpha;\beta\in\mathbb{R}$), on le note par : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow\exists\alpha;\beta\in\mathbb{R}\quad\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

Résumé 10 : Vecteurs de l'espace

L'ensemble des vecteurs de l'espace

Comme l'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des vecteurs de l'espace est muni des opérations : Egalités (relation de Chasles et la règle du parallélogramme), l'addition et la multiplication par un réel.

Vecteurs colinéaires

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement s'il existe un réel α tel que : $\vec{u}=\alpha\vec{v}$

Points alignés

Les points A, B et C sont alignés, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Vecteurs coplanaires

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, si et seulement s'il existe deux réels α et β tel que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

Points coplanaires

Les points A,B,C et D sont coplanaires, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Droite incluse dans un plan

On dit que la droite (D) est incluse dans le plan (P) et on écrit $(D)\subset(P)$ s'il existe deux points distincts de (D) appartiennent au plan (P).

Remarques

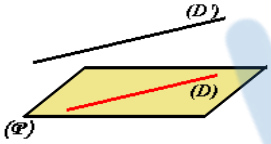
Pour montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan (P) il suffit de montrer que $A\in(P)$ et $B\in(P)$

Pour montrer que $M\in(ABC)$ il suffit de trouver $\alpha;\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

Droite parallèle à un plan

Une droite (D') est parallèle au plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite (D) incluse dans (P). On écrit $(D')//(P)$

$$(D')//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}(D')//(D)\\(D)\subset(P)\end{cases}$$



Définition vectorielle d'une droite de l'espace

Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$M\in D\left(A;\vec{u}\right)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\quad\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

Définition vectorielle d'un plan de l'espace

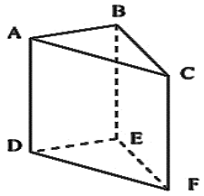
Tout plan de l'espace peut être défini par un point et deux vecteurs non colinéaires (sont dites vecteurs directeurs de ce plan).

Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow\exists\alpha;\beta\in\mathbb{R}\quad\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

Exercice 1 :

Dans la figure ci-contre ABCDEF est un prisme à base triangulaire.



1) Déterminer $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2) Déterminer $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}$

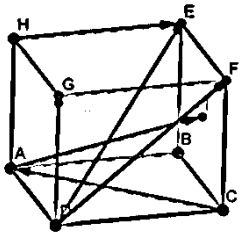
3) Soit G le point tel que :

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$.

Montrer que G est le symétrique de E par rapport à I le milieu de l'arête $[DF]$.

Exercice 2 :

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. I est le milieu de [BF].



1) Les vecteurs $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DE}$ *et* $\overrightarrow{DG}$ *sont-ils coplanaires ? Justifier.*

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{DF}$ *et* $\overrightarrow{HE}$ *sont-ils coplanaires ? Justifier.*

Exercice 3 :

Soit ABCDEFGH un cube

Déterminer les points P, Q et R tels que :

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{DR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB}\right)$

Et J le centre de la face DCGH.

Soient P et Q définis par $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ *et* $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Soient I et K les milieux respectifs de [AE] et [PQ].

1) Faire une figure.

2) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ *puis* $\overrightarrow{IK}$ *en fonction des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$.

3) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 4 :

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [HF]

M le point de l'espace tel que : $2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MA}$

Correction

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

2) Construire une figure

3) Montrer que $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

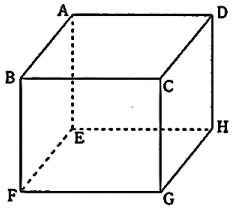
4) J et K sont les milieux respectifs de [EF] et [BC].

Montrer que $\overrightarrow{JK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$.

Exercice 5 :

Soit ABCDEFGH un cube.

On note I le milieu de [AE], J le milieu de [GH] et O le milieu de [CH].



1) a) Montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AO}$

b) En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACH).

2) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AH}$.

3) Déterminer $D(O;\overrightarrow{IJ})$ *et* $D(G;\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{OF})$

Exercice 6 :

Soit ABCDEFGH un cube.

1) Déterminer le plan passant par le point G et dirigé par les deux vecteurs $\overrightarrow{GF}$ *et* $\overrightarrow{GH}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que :

$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AE}$ *avec* $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Exercice 7 :

Soit ABCDEFGH est un cube.

Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{GJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

1-Faire une figure

2-Montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$

3-En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{FG}$ *sont coplanaires.*

Exercice 8 :

On considère un tétraèdre ABCD. Les points I, J, K et L sont définis respectivement par :

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

1) Faire une figure.

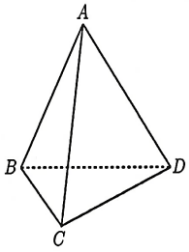
2) a) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{KL}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires

3) Montrer que la (BD) est parallèle au plan (IJKL).

Exercice 9 :

On considère un tétraèdre ABCD.



Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

F le point défini par $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Et G le point défini par : $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$

1) Faire une figure.

2) Justifier que E se trouve dans le plan (ABC)

3) Les points E, C et D sont-ils alignés ? Justifier.

4) Justifier que les droites (FC) et (AD) sont coplanaires.

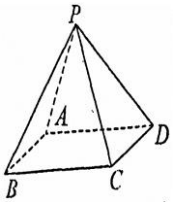
5) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ *et* $\overrightarrow{CF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$.

6) En déduire que G est le point d'intersection des droites (AD) et (FC).

Exercice 10 :

PABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme.

On considère les points M, N et S Tels que :



$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$ *et* $\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *sont colinéaires.*

2) Déduire que la droite (MN) est parallèle au plan (PAD)

3) Montrer que les plans (MNS) et (PAD) sont parallèles.

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL5

1BACSEF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Dérivation)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+25}{x^2-25}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Montrer que $(\forall x\in D_f)\qquad f'(x)=\dfrac{-100x}{(x^2-25)^2}$

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) En déduire que $(\forall x\in\left]-5;5\right[)\qquad f(x)\le -1$.

6) Montrer que $y=-\dfrac{\sqrt{5}}{4}x-\dfrac{1}{4}$ est l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $\sqrt{5}$.

Exercice 2 (Dérivation)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+1}$

Correction

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter le résultat graphiquement.

3) Déterminer $D_{f'}$ l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_{f'}$.

4) En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ sans la calculer.

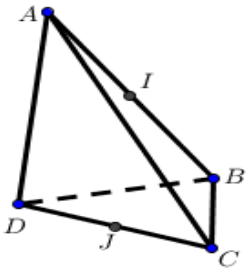
5) Déterminer g l'approximation affine de f au voisinage de 8.

6) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{9,001}$ (on pourra remarquer que $\sqrt{9,001}=f(8,001)$)

Exercice 3 (Vecteurs de l'espace)

$ABCD$ un tétraèdre, I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[DC]$ respectivement.

On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CB}$.



1) a) Montrer que $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{NB}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{JN}-4\overrightarrow{IN}$.

c) Montrer que les points I, J, M et N sont coplanaires.

2) Montrer que les droites (JB) et (DN) sont parallèles.

3) En déduire que la droite (DN) est parallèle au plan (AIJ).

Exercice 4 (Dérivation)

Calculer et simplifier $f'(x)$ dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+5x+3$; $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $f(x)=x^2\sqrt{x}$; $f(x)=\dfrac{sin(x)}{cos^2(x)}$;

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $f(x)=\dfrac{1}{3x+sin(x)}$; $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-3}$; $f(x)=\left(x^2+8x+4\right)^3$

Exercice 5 (Dérivation)

1) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ \ sin(x)\le x$ (On pourra considérer la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-sin(x)$)

2) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ \ 1-\dfrac{x^2}{2}\le cos(x)$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS5

1BSEF-A
01h30min
Aissa HIYAB

Note :

- **Les calculatrices sont autorisées.**
- **Toute réponse non justifiée est considérée comme incomplète.**
- **La correction retiendra la bonne présentation des copies de rédaction.**

Exercice 1 (9pts)

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$f(x)=-\frac{3}{2}x^2+x+2$, $g(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+10x+1$ et $h(x)=\frac{-7x+3}{-3x+6}$

1) Déterminer D_f, D_g et D_h. 0.75pt

2) Montrer que

$(\forall x\in D_f)\ f'(x)=-3x+1$, $(\forall x\in D_g)\ g'(x)=-x^2+3x+10$ et $(\forall x\in D_h)\ h'(x)=\frac{-33}{(-3x+6)^2}$ 2.25pt

3) a. Calculer les limites de f aux bornes de D_f 0.5pt

b. Calculer les limites de g aux bornes de D_g 0.5pt

c. Calculer les limites de h aux bornes de D_h 1pt

4) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f, g et h. 2.25pt

5) En déduire que $(\forall x\in D_f)\ f(x)\le\frac{13}{6}$ 0.25pt

6) En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer la limite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ 1.5pt

Exercice 2 (8pts)

On considère un tétraèdre $ABCD$. Les points I, J, K et L sont définis respectivement par :

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}\ ;\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\ ;\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

1) Faire une figure. 1pt

2) Montrer que $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. 2pt

3) En déduire que $\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KL}$. 1pt

4) En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires. 2pt

5) Montrer que $(AD)//(JI)$ et déduire que la droite (AD) est parallèle au plan (JLI) 2pt

Exercice 3 (3pts)

Montrer que $\forall a;b;c\in]0;+\infty[\quad (a+b+c)^3\ge 27abc$

(Indication : On pourra étudier les variations sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par :

$f(x)=(x+b+c)^3-27xbc$)

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS5

1BSEF-B
01h30min
Aissa HIYAB

Note :

- **Les calculatrices sont autorisées.**
- **Toute réponse non justifiée est considérée comme incomplète.**
- **La correction retiendra la bonne présentation des copies de rédaction.**

Exercice 1 (9pts)

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+2$, $g(x)=\frac{5x-3}{-x+1}$ et $h(x)=-3x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f, D_g et D_h. 0.75pt

2) Montrer que

$(\forall x\in D_f)\ f'(x)=x^2-x-6$, $(\forall x\in D_g)\ g'(x)=\frac{2}{(-x+1)^2}$ et $(\forall x\in D_h)\ h'(x)=-6x+4$ 2.25pt

3) a. Calculer les limites de f aux bornes de D_f 0.5pt

b. Calculer les limites de g aux bornes de D_g 1pt

c. Calculer les limites de h aux bornes de D_h 0.5pt

4) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f, g et h. 2.25pt

5) En déduire que $(\forall x\in D_h)\ h(x)\le\frac{7}{3}$ 0.25pt

6) En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer la limite : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(3x-2)^{2023}-1}{x-1}$ 1.5pt

Exercice 2 (8pts)

On considère un tétraèdre $ABCD$. Les points I, J, K et L sont définis respectivement par :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}\ ;\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\ ;\overrightarrow{DL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$$

1) Faire une figure. 1pt

2) Montrer que $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. 2pt

3) En déduire que $\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JK}$. 1pt

4) En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires. 2pt

5) Montrer que $(AB)//(IJ)$ et déduire que la droite (AB) est parallèle au plan (IKJ) 2pt

Exercice 3 (3pts)

Montrer que $\forall a;b;c\in]0;+\infty[\quad (a+b+c)^3\ge 27abc$

(Indication : On pourra étudier les variations sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par :

$f(x)=(x+b+c)^3-27xbc$)

11

Etude de fonctions

HIYAB

Dans tout ce chapitre f est une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Branches infinies d'une courbe

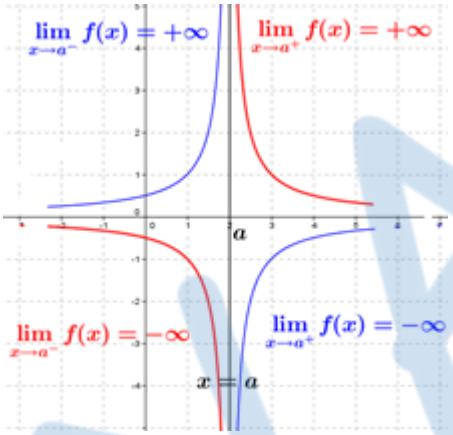
Définition 1 : Branches infinies

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de $(\mathcal{C}_f)$ tend vers l'infini. (C'est à dire $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$, ou $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$)
- Généralement, les branches infinies décrivent le comportement de f aux bornes de D_f, c'est pour cette raison qu'on s'intéresse au calcul des limites aux bornes de D_f.
- Les branches infinies sont constituées de droites asymptotes et de branches paraboliques.

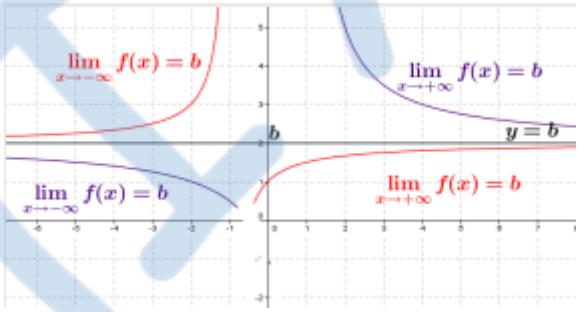
1-1 Asymptote horizontale - Asymptote verticale

Définitions 2 :

- Lorsque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=a$



- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. $-\infty$).



Exemple 1 :

1) Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $+\infty$.

2) Soit g une fonction définie par $g(x)=\dfrac{-2}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=-\infty$ alors $(\mathcal{C}_g)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

Application 1 :

1) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $g(x)=\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$

Calculer $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement.

3) Soit f une fonction numérique définie par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

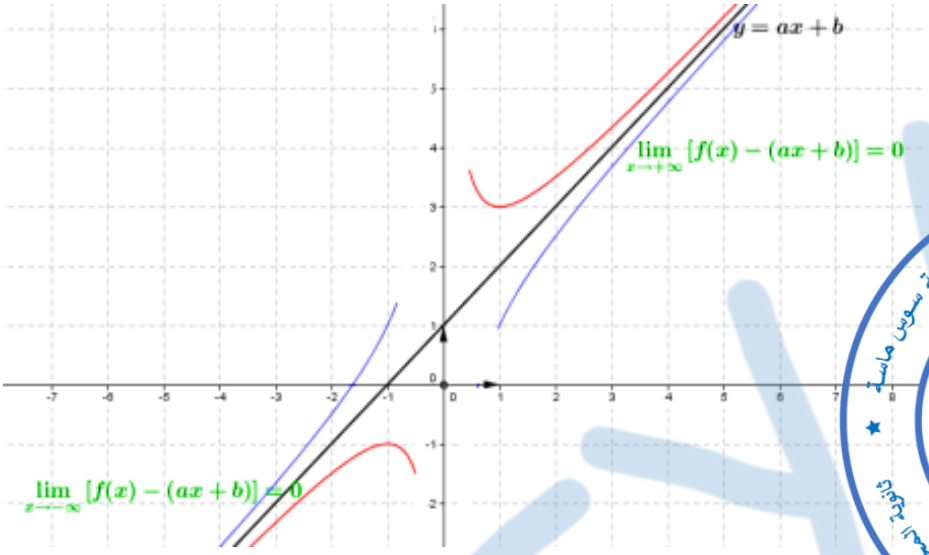
b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter les résultats graphiquement.

1-2 Asymptote oblique

Définition 3 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 2 :

Soit f une fonction définie par $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{x^2}$.

Montrons que la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(2x-3)\big)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(2x-3+\dfrac{3}{x^2}\right)-(2x-3)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$

Donc la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

Propriété 1 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-ax=b$), alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).

Remarque 1 :

Cette propriété est utilisée lorsqu'on ne donne pas l'équation de l'asymptote oblique dans l'exercice.

Application 2

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$, en déterminant son équation.

2) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.

Remarque 2 :

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D): $y=ax+b$ se déduit par l'étude de signe de $f(x)-(ax+b)$:

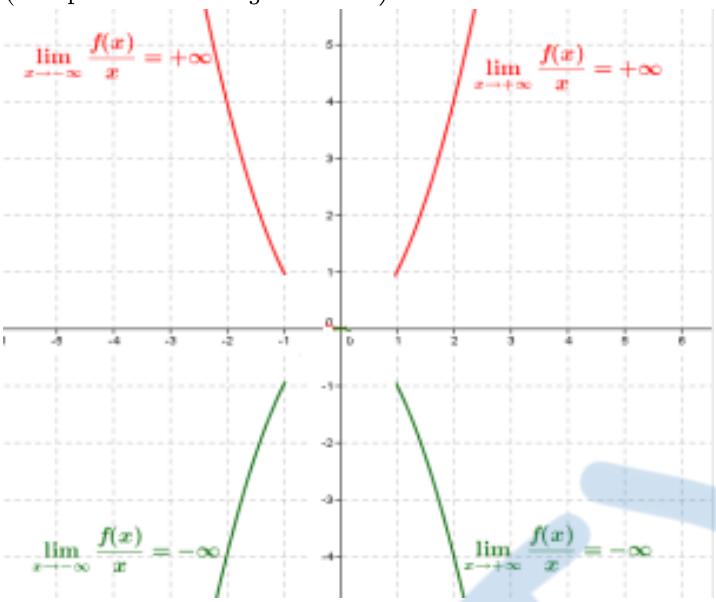
- Si $f(x)-(ax+b)>0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)<0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)=0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .

1-3 Branches paraboliques

Définition 4 :

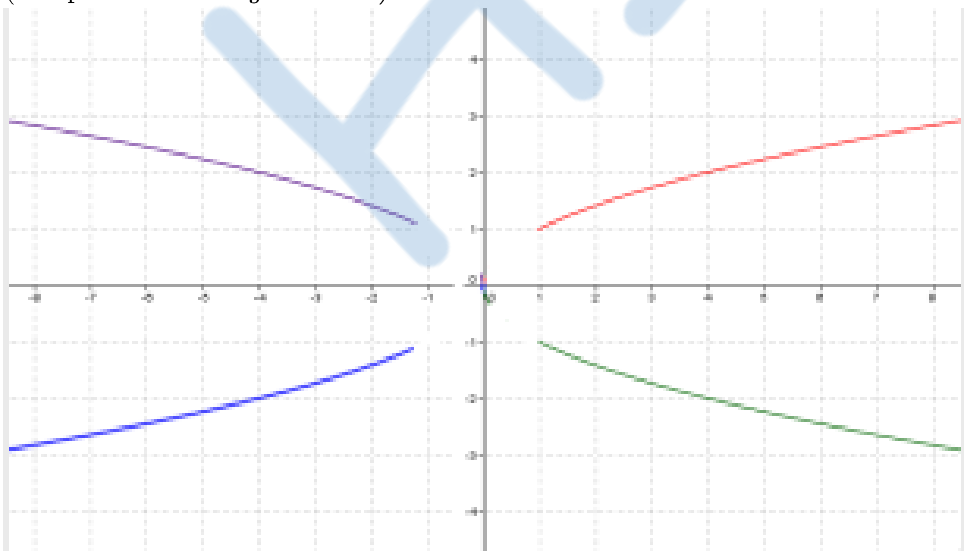
Soit f une fonction telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou bien on dit que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).

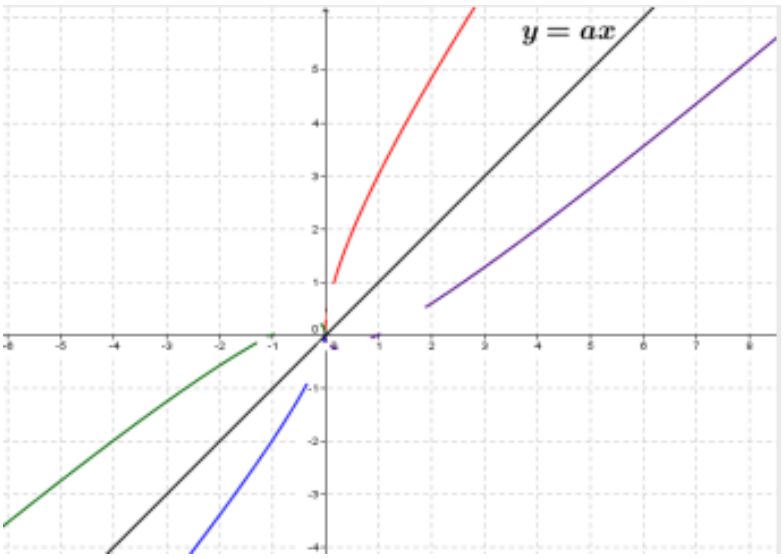


الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou bien on dit que l'axe des abscisses est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-ax\big)=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ (ou bien on dit que la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Application 3

Etudier les branches paraboliques de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=2x^3-x$ 2) $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x+2}$

Remarques 3 :

- Quand on demande d'interpréter graphiquement les limites aux bornes du domaine de définition d'une fonction, ça veut dire donner les branches infinies (Asymptotes et branches paraboliques) éventuelles de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les équations des asymptotes et des directions asymptotiques et leurs voisinages.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ n'est pas suffisante pour affirmer qu'on a une branche parabolique mais il faut s'assurer d'abord qu'on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

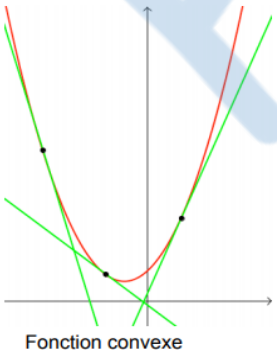
  Par exemple : La fonction $f(x)=\dfrac{sin(x)}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{sin(x)}{x^2}=0$, mais la fonction f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ car elle le coupe indéfiniment aux points d'abscisses $x_0=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$.

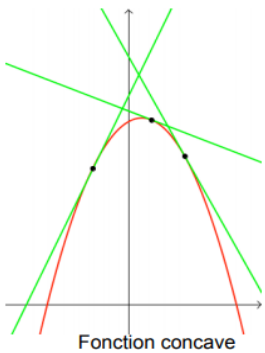
2) Concavité d'une courbe

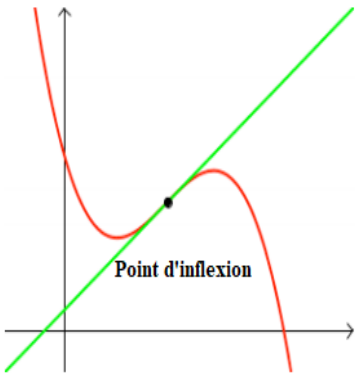
Définition 5 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- On appelle point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$, tout point où elle change de concavité.


Fonction convexe


Fonction concave



Propriété 2 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a\in I$.

- $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f''(x)\geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f''(x)\leq 0$
- $f''(a)=0$ et f'' change de signe au voisinage de $a \Rightarrow$ le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$

Exemple 3

Etudions la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+x+4$

On a $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=3x^2-6x+1$ donc $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f''(x)=6x-6=6(x-1)$

On a $f''(x)=0\Leftrightarrow 6(x-1)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
(C_f)		concave		convexe	

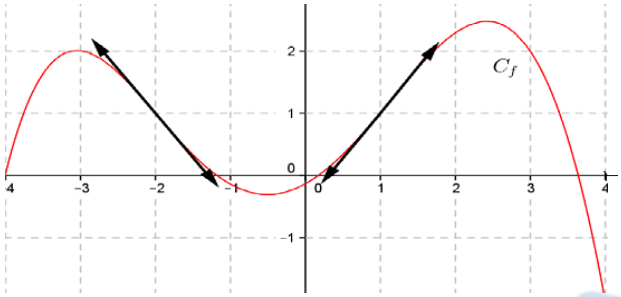
$f''(1)=0$ et f'' change de signe au voisinage de 1 donc le point $A(1;f(1)=3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

Application 4 :

Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les points d'inflexion s'ils existent dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^3+3x+5$ 2) $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$

Application 5 : Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-4;4]$



Propriétés 3 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a\in I$.

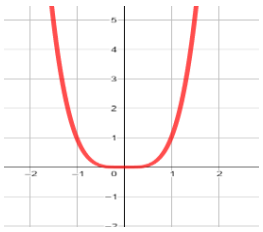
- f' change de monotonie au voisinage de a $\Rightarrow$ le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$
- $f'(a)=0$ et f' ne change pas de signe au voisinage de a $\Rightarrow$ le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$

Remarques 4 :

- $f''(a)=0$ ne suffit pas pour affirmer que le point d'abscisse a est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ mais il faut vérifier de plus si f'' change de signe au voisinage de a.

Par exemple : La fonction définie par $f(x)=x^4$,

On a $f''(0)=0$ mais la courbe $(\mathcal{C}_f)$ n'admet pas de point d'inflexion en $a=0$ comme l'indique le graphe ci-contre.



- Une fonction peut admettre plusieurs points d'inflexion.

Par exemple : La fonction f définie par $f(x)=x^4-2x^3$

On a $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$ donc on obtient le tableau de variations ci-dessous (facile à trouver) :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\forall x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=(4x^3-6x^2)'=12x^2-12x=12x(x-1)$ donc on obtient le tableau de signe de f'' suivant (facile à trouver):

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On constate donc que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion en $a=0$ et en $a=1$ et non pas un seul.

3) Eléments de symétrie d'une courbe

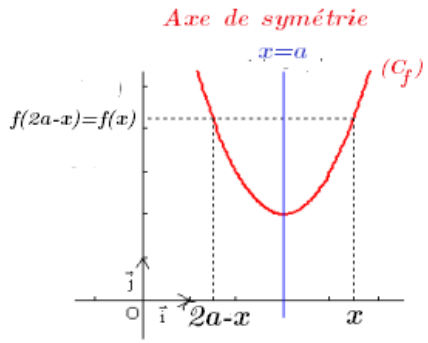
Propriété 4 :

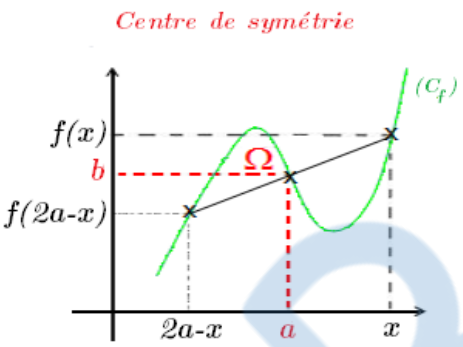
- Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

$$2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x)=2b-f(x)$$

- La droite (Δ) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

$$2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x)=f(x)$$





Exemple 4 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Montrons que le point $\Omega(-1;1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$:

* On a $a=-1$, $b=1$ et $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

* Soit $x \in D_f$, montrons que $-2-x \in D_f$

On a $x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2-x \neq -2+1 \Leftrightarrow -2-x \neq -1$. Donc $-2-x \in D_f$

* Soit $x \in D_f$, montrons que $f(2a-x)=2b-f(x)$

On a $f(2a-x)=f(-2-x)=\dfrac{(-2-x)}{(-2-x)+1}=\dfrac{2+x}{x+1}$

Et $2b-f(x)=2\times 1-f(x)=2-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-x}{x+1}=\dfrac{x+2}{x+1}$

D'où $f(2a-x)=2b-f(x)$ C.Q.F.D

Exemple 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=3x^2-2x+5$

Montrons que la droite d'équation $x=\dfrac{1}{3}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$:

* On a $a=\dfrac{1}{3}$ et $D_f=\mathbb{R}$

* Donc pour tout $x \in D_f$ on a $(2a-x)=\dfrac{2}{3}-x \in D_f$

* Pour tout $x \in D_f$ on a $f(2a-x)=f\left(\dfrac{2}{3}-x\right)=3\left(\dfrac{2}{3}-x\right)^2-2\left(\dfrac{2}{3}-x\right)+5=\ldots=3x^2-2x+5=f(x)$

D'où $f(2a-x)=f(x)$ C.Q.F.D

Application 6

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x+3}$

Montrer que le point $A(-3;-1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Application 7

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-4x+7}$

Montrer que la droite d'équation $x=2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Cas particuliers :

- Si f est une fonction impaire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme centre de symétrie le point de coordonnées $(0;0)$ (C'est à dire l'origine du repère).
- Une hyperbole, qui est la courbe d'une fonction homographique $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, (avec $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$) admet comme centre de symétrie le point $\Omega\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.
- Si f est une fonction paire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme axe de symétrie l'axe d'équation $x=0$ (C'est à dire l'axe des ordonnées).
- Une parabole, qui est la courbe d'une fonction polynômiale de degré 2 : $x \mapsto ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Remarques 5

- Un centre de symétrie n'est pas forcément un point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Par exemples : les hyperboles)
- Les éléments de symétries permettent de réduire l'ensemble sur lequel on étudie une fonction et donc de réduire le coût du travail.

4) Construction d'une courbe

Démarche de la construction d'une courbe

➢ **Placer le repère orthogonal ou orthonormé :**

- Placer les deux axes du repère, en respectant l'unité de mesure,
- Placer l'élément de symétrie (axiale ou centrale), s'il y a une symétrie,
- Noter le domaine de définition.

➢ **Comportement local :**

- Placer les points remarquables (extrémums, intersection avec les axes (ox) et (oy)),
- Placer les points d'inflexion, s'il existe,
- Placer les tangentes et les demi-tangentes.

➢ **Comportement asymptotique :**

- Placer les asymptotes de la courbe, en respectant les positions relatives,
- Esquisser les branches paraboliques.

➢ **Finaliser la construction de la courbe :**

- Relier, à main levée, tous les éléments présentés ci-dessus, en respectant le tableau de variations de la fonction.

Exemples 6

Application 8 :

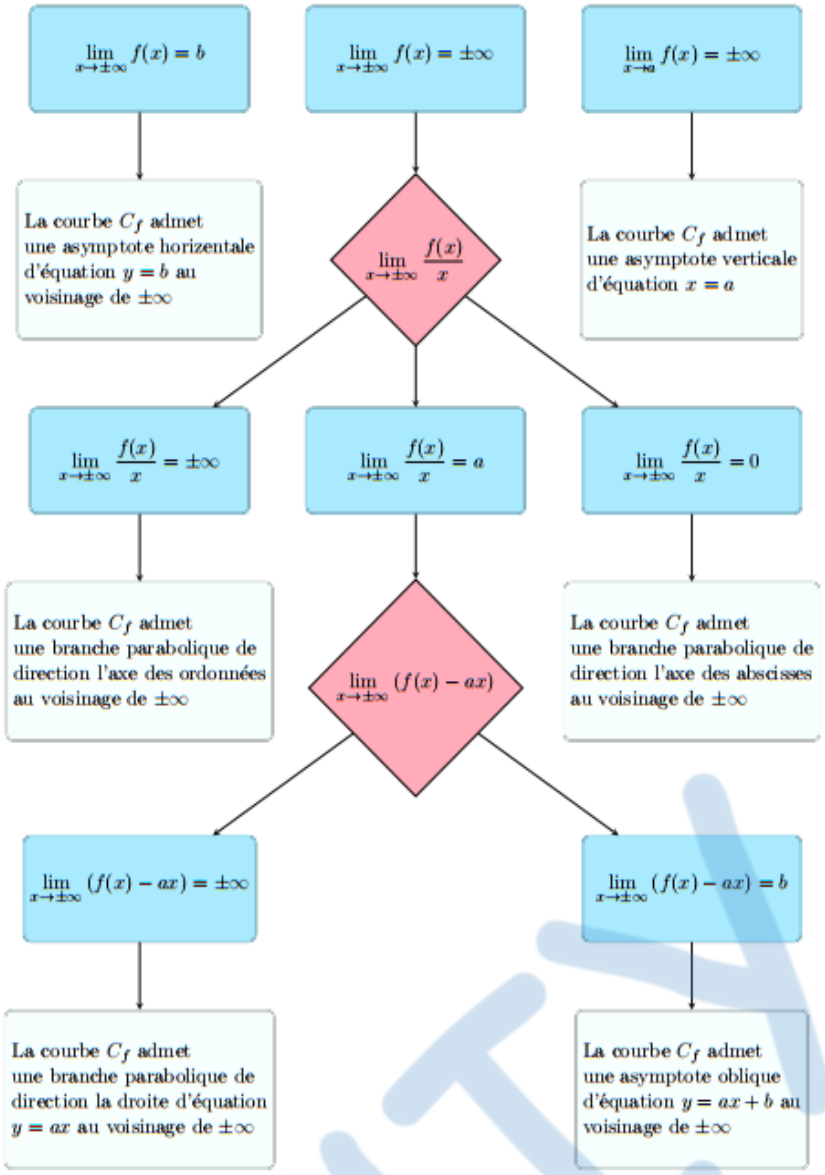
Exercice 6 de la série 11

Remarque 6 : compléments de cours

1) Résolution graphique des équations et des inéquations : **voir résumé 2**
2) Intersection de la courbe avec les axes du repère : **voir résumé 2**
3) Tangentes et demi-tangentes (interprétation graphique de la dérivabilité en un point) : **voir résumé 9**

Résumé 11 : Etude de fonctions

Branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$ si $\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$

Concavité de $(\mathcal{C}_f)$

La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ se déduit par l'étude de signe de $f''(x)$:

- $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \leq 0$
- Si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de a alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

Positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et $y = ax + b$

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) : $y = ax + b$ se déduit par l'étude de signe de $f(x) - (ax+b)$:

- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax+b) > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.
- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax+b) < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.
- Si $f(x) - (ax+b) = 0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .

Eléments de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

$\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$
$x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$

Méthode de construction de $(\mathcal{C}_f)$:

- Construire les asymptotes et les branches paraboliques ;
- Construire les tangentes et les demi-tangentes ;
- Construire les points remarquables de $(\mathcal{C}_f)$ s'ils existent : (Points d'inflexion, points d'intersection avec les axes du repère, les extremums et le centre de symétrie)
- Construire $(\mathcal{C}_f)$ à partir du tableau de variations de f

N.B : N'oublier pas de respecter l'unité de mesure du repère, les positions relatives, la concavité et tenant compte le centre ou l'axe de symétrie (s'il existe).

Exercice 1 : Droites asymptotes

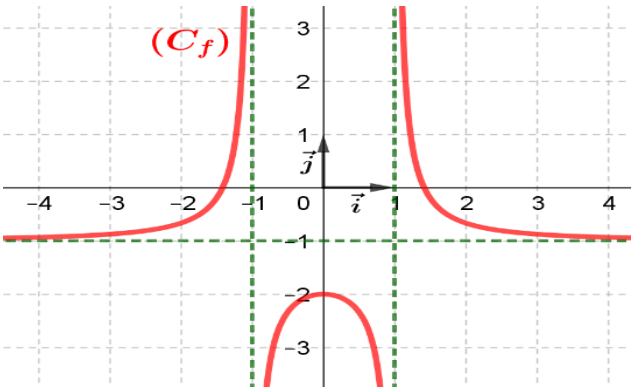
Déterminer D_f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter les résultats graphiquement dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$; $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$; $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+x-2}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+3}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous



1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

3) Interpréter graphiquement ces résultats.

Exercice 3 :

Montrer que (D) est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $y=x$

2) $f(x)=2x+5-\dfrac{3}{x+1}$; $y=2x+5$

Exercice 4 :

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants

Correction

$f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$; $f(x)=\dfrac{3x^2}{2-x}$

$f(x)=\dfrac{8x^2-4x+1}{2x+1}$; $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

$f(x)=1+\dfrac{3x^2+5x+1}{x}$; $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Exercice 5 : Branches paraboliques

Déterminer les branches paraboliques de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

$f(x)=-3x^2+x$; $f(x)=x^2+x-7$

$f(x)=2x+1+\dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}$; $f(x)=x+\sqrt{x+1}$

$f(x)=5x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$; $f(x)=-3x-2+\sqrt{3-x}$

$f(x)=3+\sqrt{2x+5}$; $f(x)=x\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 6 : Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2}{2x-1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) En déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x-2}$

b) Montrer par deux méthodes que (D) : $y=x+\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$

4) Montrer que $A(\dfrac{1}{2};1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

5) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f'(x)=\dfrac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

6) Déterminer l'équation de (T) la droite tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

7) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

8) Soit $m\in\mathbb{R}$ déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

Exercice 7 : Etude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{4(x-2)}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) Déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{x-2}$

b) En déduire que (D) : $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$

4) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

5) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$

6) Montrer que $A(2;\dfrac{5}{4})$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

7) Déterminer les points de contact entre $(\mathcal{C}_f)$ et les axes du repère.

8) Construire $(\mathcal{C}_f)$

9) Soit (Δ) la droite d'équation $y=\frac{1}{4}x$

a-Vérifier que (Δ) coupe $(\mathcal{C}_f)$ dans le point d'abscisse $\frac{2}{3}$

b-Résoudre graphiquement l'équation $x\in D_f$; $f(x)\le\frac{1}{4}x$

Exercice 8 : Etude d'une fonction polynomiale

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

3) Dresser le tableau de variations de f

4) Dresser le tableau de concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et déduire qu'elle admet un unique point d'inflexion Ω qu'on déterminer.

5) Vérifier que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

6) Donner l'équation de (T) la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en Ω

7) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T)

Exercice 9 : Etude d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) M. q. la droite $x=2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

3) a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b. Montrer que :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-2\right)=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+2\right)=0$

c. En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes obliques (D) au voisinage de $-\infty$ et (D') au voisinage de $+\infty$

4) a. Vérifier que $(\forall x\in D_f)\ f(x)=\sqrt{-(x-1)}\times\sqrt{-(x-3)}$

b. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en 3 et interpréter graphiquement ces résultats.

5) Montrer que :
$(\forall x\in D_f\setminus\{1;\ 3\}):\ f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

c. Dresser le tableau de variations de f

6) Tracer (D), (D') et $(\mathcal{C}_f)$

Exercice 10 : Etude d'une fonction trigonométrique

f la fonction définie par $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} & ;\ x\neq 2k\pi\\ f(2k\pi)=0 & ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

1) Montrer que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{(1+2k)\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

2) Montrer que f est impaire.

3) Montrer que f est périodique de période 2π

4) Déduire que le domaine d'étude de f est $D_E=[0;\pi[$

5) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

6) Calculer $\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

7) a) Montrer que $(\forall x\in]0;\pi[)\qquad f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos(x)}$

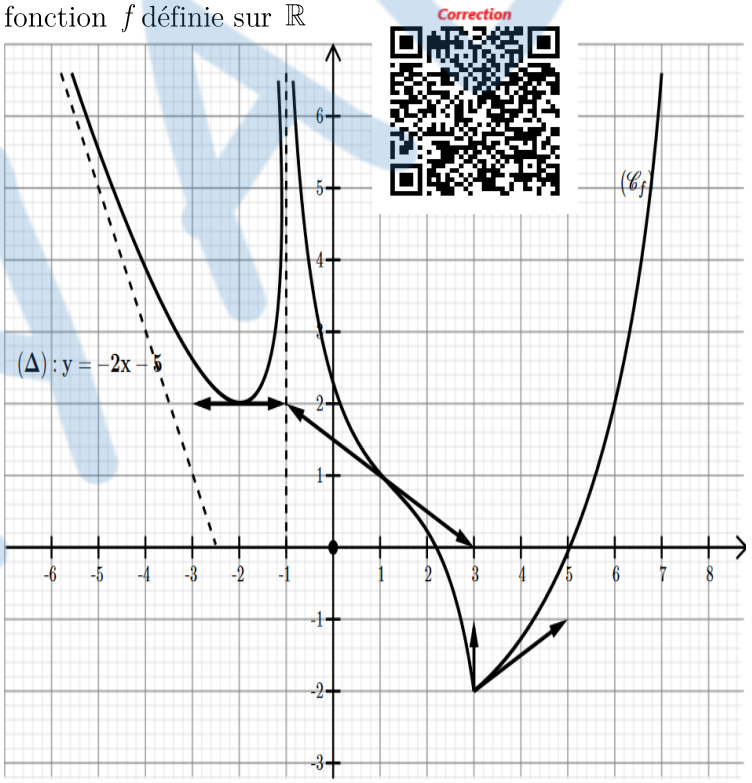
b) Dresser le tableau de variations de f sur D_E

8) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion I qu'on déterminer.

9) Construire $(\mathcal{C}_f)$ sur $[-\pi;3\pi]$

Exercice 11 : Lecture d'une courbe

Dans la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



1) Déterminer D_f, puis déterminer les limites aux bornes de D_f.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

3) Donner le tableau de variations de la fonction f en précisant le signe de f'

4) Déterminer : $f'(-2)$; $f'(1)$; $f'_d(3)$ et $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{f(x)+2}{x-3}$

5) Dresser le tableau de concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant le signe de f'

6) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1

7) Discuter suivant les valeurs de paramètre m le nombre des solutions de l'équation $f(x)=m$.

12
Analytique de l'espace

HIYAB

1) Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

1-1 Repère cartésien de l'espace

Définition 1

On considère trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ *. O un point de l'espace.*

- *Le triplet* $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *est appelé une base de l'espace.*
- *Le quadruplet* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *est appelé un repère cartésien de l'espace.*

Remarques 1

On considère quatre points O, I, J et K non coplanaires. Alors :

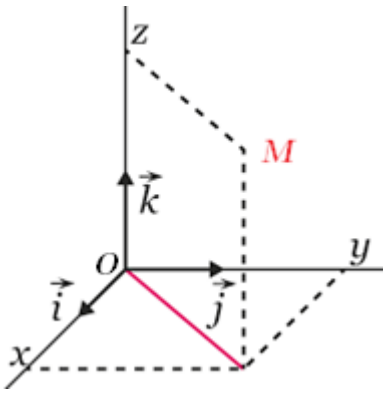
- *Le triplet* $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est une base de l'espace.*
- *Le quadruplet* $(O,\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est un repère cartésien de l'espace.*
- *Si les droites* (OI), (OJ) *et* (OK) *sont deux à deux orthogonales alors on dit que le repère* $(O,\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est orthogonal (par exemple : dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH le quadruplet* $(A,\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ *est un repère orthogonal).*
- *Si* $OI=OJ=OK=1$ *alors on dit que le quadruplet* $(O,\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ *est un repère normé. (Par exemple dans le cube ABCDEFGH le quadruplet* $(A,\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ *est un repère orthogonal et normé, on dit donc qu'il est orthonormé).*

1-2 Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace

Définition 2

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *un repère de l'espace.*

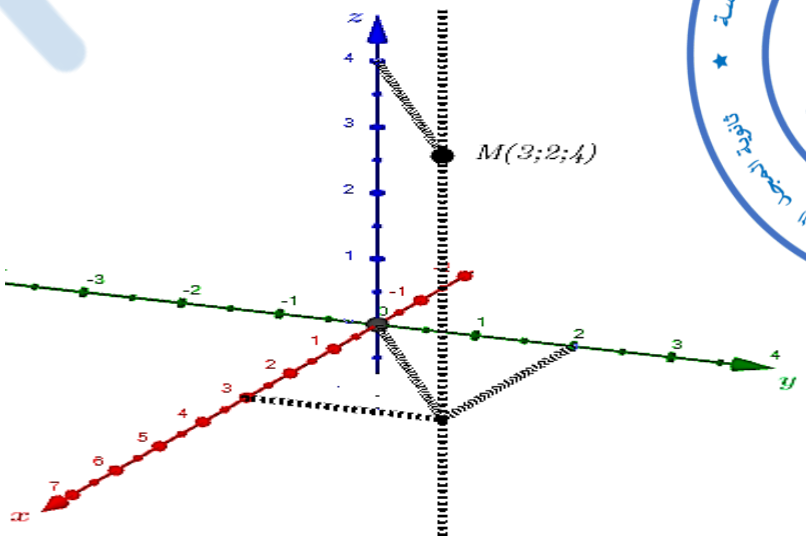
- *Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet* $(x;y;z)$ *de réels tel que :* $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
- *Le triplet* $(x;y;z)$ *est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$*. On note* $M(x;y;z)$ *ou* $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$



- *x s'appelle l'abscisse de M dans ce repère et* $(O;\vec{i})$ *est l'axe des abscisses.*
- *y s'appelle l'ordonnée de M dans ce repère et* $(O;\vec{j})$ *est l'axe des ordonnées.*
- *z s'appelle la côte de M dans ce repère et* $(O;\vec{k})$ *est l'axe des côtes.*

Exemple 1 :

Plaçons le point $M(3;2;4)$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *:*



Remarques 2

- Le plan $P(O;\vec{i};\vec{j})$ est noté (Oxy) on écrit $P(O;\vec{i};\vec{j})=(Oxy)$ de même : $P(O;\vec{i};\vec{k})=(Oxz)$ et $P(O;\vec{j};\vec{k})=(Oyz)$
- $M(x;y;0)\in(Oxy)$; $M(x;0;z)\in(Oxz)$; $M(0;y;z)\in(Oyz)$

Exemple 2 : Représenter les points $A(1;2;0)$, $B(1;2;3)$ et $C(-1;2;0)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1-3 Coordonnées d'un vecteur, coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, $\alpha\vec{u}$ et de $\overrightarrow{AB}$

Définition 3 : Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tel que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
- Le triplet $(x;y;z)$ est appelé triplet de composantes ou de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et on note $\vec{u}(x;y;z)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Propriété 1

- Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace muni de la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On a :
  - $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$ et $\alpha\vec{u}(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$
  - $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x=x'$ et $y=y'$ et $z=z'$
- Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace muni du repère $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
  - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
  - Le triplet des coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$ est : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Exemple 3 :

L'espace est rapporté à un repère, on considère les points $A(2;-1;-3)$, $B(7;-6;7)$ et $C(-1;3;-2)$

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les coordonnées du point M sachant que $\overrightarrow{CM}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

2) Déterminer les coordonnées du point B' sachant que A est le milieu de segment $[BB']$.

Exemple 4 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Déterminer dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{EG}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{DG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ et $3\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{BG}$.

2) Condition de colinéarité de deux vecteurs dans l'espace

Propriété 2 : Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace, $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace.

Les vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=0\ ,\ \begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}=0\quad et\quad \begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=0$$

Ces déterminants sont appelés **les déterminants extraits** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques 3

1) Si tous les cordonnées x', y' et z' sont non nuls, alors :

Les vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont colinéaires si et seulement si : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$

2) Les points A, B et C sont alignés dans l'espace $\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple 5

1) Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}(-1;2;1)$ et $\vec{v}(1;-3;2)$; b) $\vec{u}(2;-1;-4)$ et $\vec{v}(-1;\frac{1}{2};2)$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

2) Etudier l'alignements des points A, B et C dans les cas suivants :

a) $A(0;0;3)$; $B(-1;0;0)$; $C(5;-3;4)$

b) $A(3;0;-2)$; $B(1;5;-3)$; $C(-3;15;-5)$

3) Montrer que les points $D(7;2;2)$, $E(5;-2;2)$ et $F(6;3;4)$ définis un plan.

3) Condition de coplanarité de trois vecteurs de l'espace

Définition 4

Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace, $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x";y";z")$ trois vecteurs de l'espace.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le réel noté $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ et défini par :

$$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Exemple 6

Calculer $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

Remarque 4 : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace on a $det(\vec{v};\vec{u};\vec{w}) = -det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

Propriété 3 :

Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace, $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x";y";z")$ trois vecteurs de l'espace :

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

Remarque 5 : Les points A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = 0$

Exemple 7

1) Etudier la coplanarité des vecteurs $\vec{u}(-1;2;0)$, $\vec{v}(3;-2;1)$ et $\vec{w}(\frac{5}{2};0;4)$

2) Etudier la coplanarité des points $A(1;2;3)$; $B(2;-1;1)$; $C(1;1;-1)$; $D(0;4;1)$

4) Etude analytique d'une droite dans l'espace

4-1 Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Propriété 4 et Définition 5 : L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (D) la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a;b;c)$

On a $M(x;y;z) \in (D)$ si et seulement si $(\exists t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases}$

Ce système est appelé : **une représentation paramétrique** de la droite (D).

Remarques 6

- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
- Le réel t est appelé le paramètre de la droite (D) et on peut le noter aussi par : k, α, β..... etc
- Pour vérifier que $A \in (D)$, il suffit de remplacer x, y et z par les coordonnées de A et s'assurer par la suite qu'on obtient **la même valeur** du paramètre t dans les trois équations de la représentation paramétrique de (D).

Exemple 8

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $A(-1;2;3)$ et dirigée par $\vec{u}(1;3;-1)$.

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) tel que $A(-1;2;3)$ et $B(2;-3;1)$

b) Le point $C(5;-8;1)$ appartient-il à la droite(AB) ?

3) On considère la droite (Δ) définie par sa représentation paramétrique : $(\Delta):\begin{cases}x=-2+3t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$

Donner un vecteur directeur de (Δ) et deux points appartenant à (Δ).

4-2 Deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Propriété 5 et Définition 6

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (D) la droite passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a;b;c)$.

- Si $a\neq 0$, $b\neq 0$ et $c\neq 0$, alors $M(x;y;z)\in(D)$ si et seulement si $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$
- Si $c=0$ alors $M(x;y;z)\in(D)$ si et seulement si $\begin{cases}\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}\\z-z_A=0\end{cases}$
- Si $a=0$ et $b=0$ alors $M(x;y;z)\in(D)$ si et seulement si $\begin{cases}x-x_A=0\\y-y_A=0\end{cases}$

Ce système (en rouge) est appelé « **deux équations cartésiennes** de la droite (D) ».

Exemple 9

1) Donner deux équations cartésiennes de la droite (D) dans les cas suivants :

a) (D) passe par les points $A(1;3;2)$ et $B(2;-1;1)$; b) (D) à une représentation paramétrique : $\begin{cases}x=1+3t\\y=3\\z=2-2t\end{cases}$

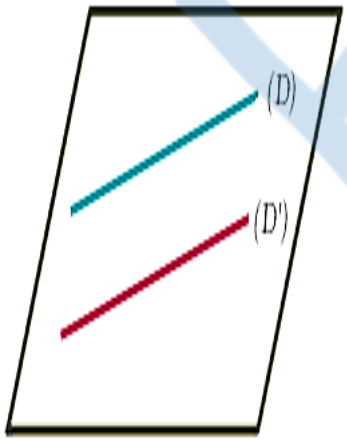
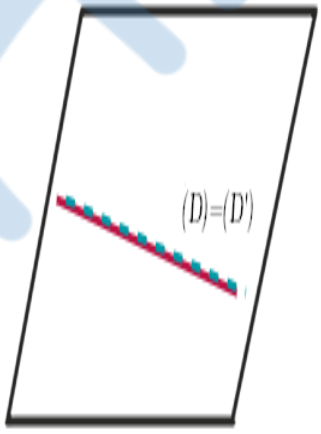
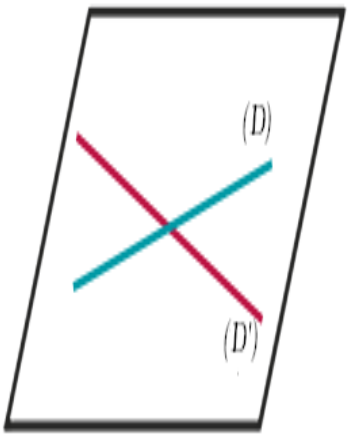
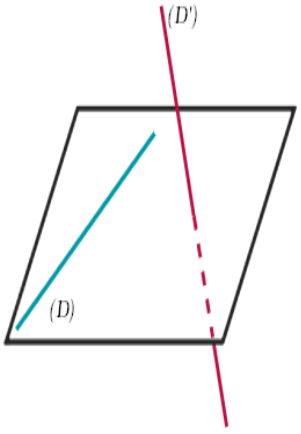
2) On considère la droite (Δ) définie par les deux équations cartésiennes : $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{3-z}{4}$

a) Donner un vecteur directeur de (Δ) et un point appartenant à (Δ).

b) Le point $C(2;-3;2)$ appartient-il à la droite (Δ) ?

4-3 Positions relatives de deux droites dans l'espace

Propriété 6 : Soit $D(A;\vec{u})$ et $D'(B;\vec{v})$ deux droites dans l'espace

<table>
<tr><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires</td><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires</td></tr>
<tr><td>$A\notin(D')$</td><td>$A\in(D')$</td><td>$det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})=0$</td><td>$det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})\neq 0$</td></tr>
<tr><td>Strictement parallèles</td><td>Confondues</td><td>Sécantes en un point</td><td>Ne sont pas coplanaires</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td><td> 
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parallèles</td><td>Sécantes</td><td>Non parallèles et non sécantes</td></tr>
<tr><td colspan="3">Coplanaires</td><td>Non coplanaires</td></tr>
</table>

Remarque 7

Pour déterminer l'intersection de deux droites, on résout un système dans lequel on prend soit des représentations paramétriques, soit des équations cartésiennes qui définissent chaque droite.

Exemple 10 : *Etudier la position relative des deux droites* (D) *et* (D') *dans les cas suivants :*

1) $(D):\begin{cases}x=-1-t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}x=-2+k\\y=2-2k\\z=4+k\end{cases}$;

2) $(D):\begin{cases}x=1+\alpha\\y=-2-\alpha\\z=2+3\alpha\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}x=2\beta\\y=1-\beta\\z=3+\beta\end{cases}$

3) $(D):\begin{cases}x=t\\y=5+2t\\z=2+3t\end{cases}$; $(D'):\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{1-y}{-4}=\dfrac{z+2}{6}$

5) Etude analytique d'un plan dans l'espace

5-1 Représentation paramétrique - Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

Propriété 7 et Définition 7 : *L'espace est rapporté à un repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (P) *le plan passant par un point* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$

On a $M(x;y;z)\in(D)$ *si et seulement si* $(\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)$ $\begin{cases}x=x_A+a\times\alpha+a'\times\beta\\y=y_A+b\times\alpha+b'\times\beta\\z=z_A+c\times\alpha+c'\times\beta\end{cases}$

Ce système est appelé : **une représentation paramétrique** *du plan* (P)

Propriété 8 et Définition 8 : *L'espace est rapporté à un repère* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soit (P) *le plan passant par un point* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$

Le plan (P) *est un ensemble des points* $M(x;y;z)\in(D)$ *de l'espace vérifiant une équation de type :*

$$(P):\begin{vmatrix}x-x_A & a & a'\\ y-y_A & b & b'\\ z-z_A & c & c'\end{vmatrix}=0$$

Cette équation est de la forme $(P):\ \alpha x+\beta y+\delta z+d=0$ *où* $\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}$ *et* $(\alpha;\beta;\delta)\neq(0;0;0)$

L'équation $\alpha x+\beta y+\delta z+d=0$ *est appelée* **une équation cartésienne** *du plan* (P)

Exemple 11

1) Soit (P) *le plan passant par* $E(1;-1;1)$ *et dirigé par les deux vecteurs* $\vec{u}(2;4;2)$ *et* $\vec{v}(2;6;0)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique du plan (P)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P)

c) Montrer par deux méthodes que le point $D(-1;-4;-2)$ *appartient au plan* (P)

2) On considère les points $A(1;1;-4)$, $B(0;1;-3)$ *et* $C(0;-4;2)$.

a) Montrer que les points A, B et C déterminent un unique plan (ABC)

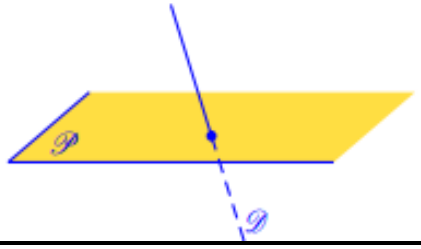
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

c) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC)

5-2 Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

Propriété 9 : *Soit* (D) *la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur* $\vec{u}$.

(P) *est le plan passant par le point B et dirigé par les vecteurs* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$		$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$
$A\in(P)$	$A\notin(P)$	
$(D)\subset(P)$	*Strictement parallèles*	*Sécants en un point*
		
Parallèles		*Non parallèles*

Remarque 8

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan, on résout un système dans lequel on prend **une représentation paramétrique de la droite et une équation cartésienne du plan.**

Exemple 12

1) Etudier la position relative de la droite $(D_1):\begin{cases}x=2+3t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$ *et du plan* $(P_1):\begin{cases}x=1+2\alpha+\beta\\y=-1-3\alpha+2\beta\\z=1+\alpha\end{cases}$

2) Etudier l'intersection de la droite $(D_2):\begin{cases}x=2-4t\\y=-1+2t\\z=3t\end{cases}$ *et du plan* $(P_2):3x+2y+z+1=0$

5-3 Positions relatives de deux plans dans l'espace

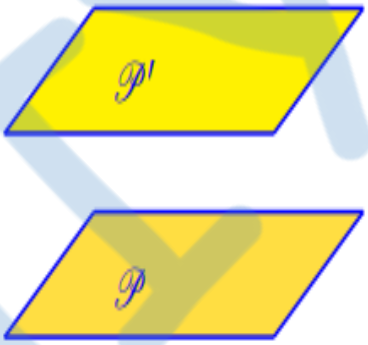
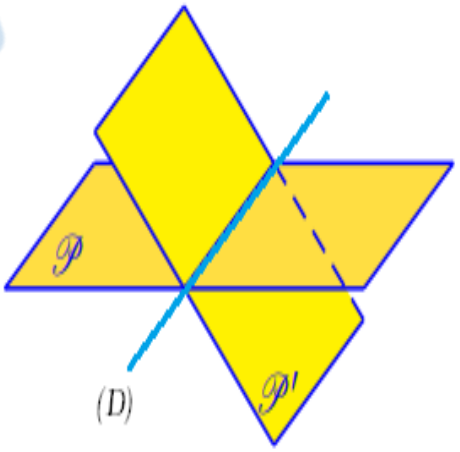
Propriété 10

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Soient (P) *et* (P') *les plans définis par les équations cartésiennes :*

$(P):\ ax+by+cz+d=0$ *et* $(P'):\ a'x+b'y+c'z+d'=0$

- *Les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$ *sont colinéaires si et seulement si les plans* (P) *et* (P') *sont parallèles.*
- *Les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$ *ne sont pas colinéaires si et seulement si les plans* (P) *et* (P') *sont sécants (en une droite).*

Plans parallèles		Plans non parallèles
confondus	strictement parallèles	sécants en une droite
		

Remarque 9

Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans, on résout un système dans lequel on prend **des équations cartésiennes** *qui définissent chaque plan.*

Exemple 13

1) On considère les plans $(P):\ 2x+y-z+2=0$ *et* $(P'):\ 3x+y-4z-1=0$

a) Montrer que (P) *et* (P') *sont sécants en une droite* (D)

b) Déterminer une représentation paramétrique de (D)

c) Vérifier que $H(6;-13;1)\in(D)$

2) Etudier la position relative des plans (Q) *et* (Q') *dans les cas suivants :*

a) $(Q):4x-6y+2z+5=0$ *et* $(Q'):\ 2x-3y+z+1=0$

b) $(Q):\begin{cases}x=1+2\alpha-\beta\\y=-2-\alpha\\z=\alpha+\beta\end{cases}$ *et* $(Q'):\ -2x+2y+z+1=0$

Résumé 12 : Analytique de l'espace

1) Coordonnées d'un point et d'un vecteur

- $M(x;y;z)\in(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- I *le milieu du segment* $[AB]\Leftrightarrow I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

- $\vec{u}(x;y;z)\in(\vec{i};\vec{j};\vec{k})\Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
- $\vec{u}(x;y;z)\Rightarrow \alpha\vec{u}(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$
- $\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z')\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$
- $\vec{u}(x;y;z)=\vec{v}(x';y';z')\Leftrightarrow x=x'$ *et* $y=y'$ *et* $z=z'$

2) Colinéarité

$\vec{u}(x;y;z)$ *et* $\vec{v}(x';y';z')$ *sont colinéaires*

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=0\ ,\ \begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}=0\ \text{ et }\ \begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=0$$

3) Déterminant

$\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ *et* $\vec{w}(x";y";z")$ *trois vecteurs*

$$det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}x & x' & x"\\ y & y' & y"\\ z & z' & z"\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}y' & y"\\ z' & z"\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x"\\ z' & z"\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x"\\ y' & y"\end{vmatrix}$$

4) Coplanarité et alignement

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ *sont coplanaires*

$\Leftrightarrow det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$

- A, B, C et D *sont coplanaires*

$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=0$

- A, B *et* C *sont alignés*

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

Soit (D) *la droite passant par* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{u}(a;b;c)$

5) Représentation paramétrique de la droite (D)

$$(D):\begin{cases}x=x_A+a\times t\\ y=y_A+b\times t\\ z=z_A+c\times t\end{cases}\quad /t\in\mathbb{R}$$

6) Deux équations cartésiennes de la droite (D)

- *Si* $a\neq 0$, $b\neq 0$ *et* $c\neq 0$, *alors*

$$(D):\ \frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$$

- *Si* $c=0$ *alors* $(D):\begin{cases}\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}\\ z-z_A=0\end{cases}$

- *Si* $a=0$ *et* $b=0$ *alors* $(D):\begin{cases}x-x_A=0\\ y-y_A=0\end{cases}$

Soit (P) *la droite passant par le point* $A(x_A;y_A;z_A)$ *et dirigée par les vecteurs* $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$

7) Représentation paramétrique du plan (P)

$$(P):\begin{cases}x=x_A+a\times\alpha+a'\times\beta\\ y=y_A+b\times\alpha+b'\times\beta\\ z=z_A+c\times\alpha+c'\times\beta\end{cases}\quad /(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

8) Equation cartésienne du plan (P)

$$(P):\begin{vmatrix}x-x_A & a & a'\\ y-y_A & b & b'\\ z-z_A & c & c'\end{vmatrix}=0$$

(Cette équation est de la forme $(P):\ \alpha x+\beta y+\delta z+d=0$ *)*

9) Positions relatives de deux droites dans l'espace : *Soient* $D(A;\vec{u})$ *et* $D'(B;\vec{v})$ *deux droites dans l'espace*

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires*		$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires*	
$A\notin(D')$	$A\in(D')$	$det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})=0$	$det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v})\neq 0$
Strictement parallèles	*Confondues*	*Sécantes en un point*	*Ne sont pas coplanaires*

10) Positions relatives d'une droite et d'un plan : *Soient* $D(A;\vec{u})$ *une droite et* $P(B;\vec{v};\vec{w})$ *un plan*

$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$		$det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$
$A\in(P)$	$A\notin(P)$	
$(D)\subset(P)$	*Strictement parallèles*	*Sécants en un point*

11) Positions relatives de deux plans

Soient (P) *et* (P') *les plans définis par :* $(P):\ ax+by+cz+d=0$ *et* $(P'):\ a'x+b'y+c'z+d'=0$

- $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$ *sont colinéaires* $\Leftrightarrow(P)$ *et* (P') *sont parallèles.*
- $\vec{u}(a;b;c)$ *et* $\vec{v}(a';b';c')$ *ne sont pas colinéaires* $\Leftrightarrow(P)$ *et* (P') *sont sécants (en une droite).*

Exercice 1 : Coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1) Placer les points $A(3;-4;0)$, $B(-5;2;4)$ et $C(1;4;-1)$

2) Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

4) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 2 : Colinéarité-Alignement

1) Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants : a) $\vec{u}(6;1;-3)$ et $\vec{v}(-2;\frac{1}{3};-1)$

b) $\vec{u}(2;-1;\frac{1}{2})$ et $\vec{v}(-1;\frac{1}{2};2)$

2) Etudier l'alignements des points A, B et C dans les cas suivants : a) $A(1;2;3)$; $B(2;0;-1)$; $C(\frac{3}{2};1;1)$

b) $A(-1;1;1)$; $B(2;0;-2)$; $C(1;2;-1)$

c) $A(1;1;0)$; $B(2;0;-1)$; $C(3;-1;m)$ avec $m\in\mathbb{R}$

Exercice 3 : Coplanarité

1) Etudier la coplanarité des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans les cas suivants : a) $\vec{u}(2;1;0)$, $\vec{v}(1;0;-1)$ et $\vec{w}(0;1;2)$

b) $\vec{u}(1;0;1)$, $\vec{v}(-1;4;1)$ et $\vec{w}(2;1;-1)$

2) Etudier la coplanarité des points A, B, C et D :

a) $A(1;1;1)$; $B(1;-3;4)$; $C(2;5;1)$; $D(-1;2;3)$

b) $A(2;-4;-1)$; $B(-3;-1;-1)$; $C(0;-2;-1)$; $D(1;-2;2)$

c) $A(m;1;-1)$; $B(-3;-1;0)$; $C(3;-3;1)$; $D(0;1;2)$

Exercice 4: Rep. param. d'une droite / Deux éqts. d'une droite

Donner une représentation paramétrique et deux équations cartésiennes de la droite (D) dans les cas suivants :

1) (D) passant par le point $A(2;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1;2;-1)$

2) (D) passant par les points $A(1;-1;0)$ et $B(1;2;3)$

3) (D) passant par le point $A(2;3;1)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\begin{cases}x=-2+3t\\y=2t\\z=1\end{cases}$

Exercice 5 : Positions relatives de deux droites

Etudier la position relative des deux droites (D) et (D') :

1) $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3t\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}x=-1+2k\\y=-k\\z=3+k\end{cases}$

2) $(D):\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}=z-1$; $(D'):\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$

3) $(D):\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=3+2t\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}3x+2y+5z=0\\x-y+3=0\end{cases}$

4) $(D):\begin{cases}x-y=0\\3x-z-2=0\end{cases}$; $(D'):\begin{cases}x-z+1=0\\y+1=0\end{cases}$

5) $(D):\begin{cases}\frac{x+1}{3}=\frac{z+3}{2}\\y=-1\end{cases}$; $(D'):\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z+2}{3}$

Exercice 6 : Equation cartésienne d'un plan/Rep. param. d'un plan

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A et dirigé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

a) $A(-1;3;4)$, $\vec{u}(-1;0;1)$ et $\vec{v}(3;-4;2)$

b) $A(0;2;1)$, $\vec{u}=\vec{i}$ et $\vec{v}=\vec{k}$

c) $A(0;-1;0)$, $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}-\vec{k}$

2) Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan (ABC) dans les cas suivants :

a) $A(0;2;1)$; $B(1;-1;1)$; $C(-1;0;3)$

b) $A(0;0;1)$; $B(-1;\frac{1}{2};0)$; $C(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2})$

3) Déterminer une représentation paramétrique du plan (P) contenant les droites $(D):\begin{cases}x=1+3t\\y=2+2t\\z=-3-2t\end{cases}$ et $(D'):\begin{cases}x=-2+3\beta\\y=-1+2\beta\\z=3-2\beta\end{cases}$

4) Déterminer une représentation paramétrique du plan passant par le point $A(2;2;1)$ et contenant la droite $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-3t\\z=-3+2t\end{cases}$

Exercice 7 : Position relative d'une droite et un plan

1) Etudier la position relative de la droite (D) et du plan (P) :

a) $(D):\begin{cases}x=1+3t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$; $(P):\begin{cases}x=3+\alpha+2\beta\\y=-1+2\alpha+\beta\\z=2+3\alpha+\beta\end{cases}$

b) $(D):\begin{cases}x-y+1=0\\2x-z+1=0\end{cases}$; $(P):3x+y-z+5=0$

c) $(D):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{4}$; $(P):\begin{cases}x=3+\alpha+\beta\\y=-1-\alpha+2\beta\\z=1+\alpha+3\beta\end{cases}$

2) a) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par $A(-1;0;3)$ et contenant la droite $(D):\frac{x+1}{3}=y-2=\frac{z-1}{3}$

b) Etudier l'intersection du plan (P) et la droite $(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=3\\z=4+t\end{cases}$

Exercice 8 : Positions relatives de deux plans

Etudier la position relative des plans (P) et (Q) :

1) (P) : $2x-y+z+1=0$; (Q) : $x+2y+z=0$

2) (P) : $4x-2y+2z-1=0$; (Q) : $-2x+y-z+1=0$

3) (P) : $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y+z-2\sqrt{2}=0$; (Q) : $-2x+\sqrt{6}y-\sqrt{2}z+4=0$

4) (P) : $x+y-z+1=0$; (Q) : $3x-y-2z-2=0$

5) (P) : $-2x+2y+z+1=0$; $(Q):\begin{cases}x=1+2\alpha-\beta\\y=-2-\alpha\\z=\alpha+\beta\end{cases}$

6) $(P):\begin{cases}x=5+5\beta'\\y=3+\alpha'+\beta'\\z=2+\alpha'+3\beta'\end{cases}$; $(Q):\begin{cases}x=1+2\alpha+\beta\\y=2+\alpha+\beta\\z=-1-\beta\end{cases}$

Correction

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL6

1BACSEF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Etude de fonctions)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}+2$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que $D_f=\mathbb{R}$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f

b) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

2) Montrer que le point $I(0;2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=-\dfrac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f''(x)=\dfrac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

b) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant ses points d'inflexions s'ils existent.

5) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point I.

6) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

7) Soit $m\in\mathbb{R}$, déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

8)Rappeler les méthodes de construction des courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions $g:x\mapsto f(|x|)$ et $h:x\mapsto -f(x)$

Correction

Exercice 2 (Analytique de l'espace)

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(6;0;-3)$, $B(0;-3;6)$, $C(7;2;2)$, $D(5;-2;-2)$ et $E(6;3;4)$.

Soit (Δ) la droite définie par $(\Delta):\begin{cases}x+y+3=0\\2y-z+12=0\end{cases}$ et (P) le plan défini par $(P):\ 2x-3y-2z-1=0$.

1) Etudier la coplanarité des points A, B, C et D.

2) Montrer que les points C, D et E ne sont pas alignés.

3) Montrer que l'équation cartésienne du plan (EDC) s'écrit $(EDC):\ 2x-4y+3z-12=0$.

4) Déterminer une représentation paramétrique du plan (EDC).

5) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB), a-t-on $E\in(AB)$?

b) Montrer que la droite (AB) et le plan (EDC) sont sécants en un point F à déterminer.

c) Vérifier que le quadrilatère $CDFE$ est un parallélogramme.

6) a) Déterminer un vecteur directeur de la droite (Δ).

b) Montrer que (Δ) est strictement parallèle au plan (EDC).

7) a) Montrer que les plans (EDC) et (P) sont sécants en une droite (D) à déterminer.

b) Vérifier que $H(1,-1;2)\in(D)$ puis étudier la position relative de (D) et (Δ).

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS6

1BSEF-A
2h
Aissa HIYAB

Note :

- **Toute réponse non justifiée est considérée comme incomplète.**
- **La correction retiendra la bonne présentation des copies de rédaction.**

Exercice 1 (12pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1) a) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ……1pt

b) Interpréter le résultat obtenu graphiquement ……2pt

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=3x(x-2)$ ……0.5pt

b) Dresser le tableau de variations de f ……0.5pt

3) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1. ……0.5pt

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f''(x)=6(x-1)$ ……0.5pt

b) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les points d'inflexions s'ils existent. ……1pt

5) Montrer que le point $I(1;2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ ……1pt

6) a) Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=(x-2)^2(x+1)$ ……0.5pt

b) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère. ……0.5pt

7) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ……2.5pt

8) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$ ……0.5pt

9) A partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, Tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction g définie par : $g(x)=x^2|x|-3x^2+4$

Exercice 2 (8pts)

On considère les points $A(2;3;1)$, $B(-1;3;5)$ et $C(1;1;-1)$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}(-3;0;4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-2;-2)$ ……0.5pt

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. ……0.5pt

2) Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit $(ABC): 4x-5y+3z+4=0$ ……1pt

3) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC) ……0.5pt

4) On considère la droite $(\Delta):\begin{cases}x=-1+3t\\y=7-2t\\z=5-4t\end{cases}$

a) Montrer que le point $E(-4;9;9)$ appartient à la droite (Δ) ……1pt

b) Montrer que la droite (Δ) et le plan (ABC) sont sécants en un point F à déterminer. ……1pt

5) a) Vérifier par trois méthodes que le point $G(4;4;0)$ appartient au plan (ABC) ……1.5pt

b) Montrer que les plans (ABC) et $(P): 4x+y+6z-8=0$ sont sécants en une droite (D) à déterminer. ..1pt

c) Donner une représentation paramétrique du plan (P) ……1pt

HIYAB

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS6

1BSEF-B
2h
Aissa HIYAB

Note :

- **Toute réponse non justifiée est considérée comme incomplète.**
- **La correction retiendra la bonne présentation des copies de rédaction.**

Exercice 1 (12pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-x^3-3x^2+4$

1) a) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ……1pt

b) Interpréter le résultat obtenu graphiquement ……2pt

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=-3x(x+2)$ ……0.5pt

b) Dresser le tableau de variations de f ……0.5pt

3) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1. ……0.5pt

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f''(x)=-6(x+1)$ ……0.5pt

b) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les points d'inflexions s'ils existent. ……1pt

5) Montrer que le point $I(-1;2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ ……1pt

6) a) Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=(x+2)^2(1-x)$ ……0.5pt

b) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère. ……0.5pt

7) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ……2.5pt

8) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$ ……0.5pt

9) A partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, Tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction g définie par : $g(x)=-x^2|x|-3x^2+4$

Exercice 2 (8pts)

On considère les points $A(0;4;6)$, $B(3;4;2)$ et $C(2;2;0)$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}(3;0;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-2;-6)$ ……0.5pt

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. ……0.5pt

2) Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit $(ABC): 4x-5y+3z+2=0$ ……1pt

3) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC) ……0.5pt

4) On considère la droite $(\Delta):\begin{cases}x=2-t\\y=4-7t\\z=-2-5t\end{cases}$

a) Montrer que le point $E(4;18;8)$ appartient à la droite (Δ) ……1pt

b) Montrer que la droite (Δ) et le plan (ABC) sont sécants en un point F à déterminer. ……1pt

5) a) Vérifier par trois méthodes que le point $G(0;1;1)$ appartient au plan (ABC) ……1.5pt

b) Montrer que les plans (ABC) et $(P): 2x+y+3z-7=0$ sont sécants en une droite (D) à déterminer ……1pt

c) Donner une représentation paramétrique du plan (P) ……1pt

HIYAB

Tronc commun sciences et tronc commun technologique
15 Cours bien détaillés
15 Résumés bien précis
15 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
Astuces et stratégies d'apprentissage
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac sciences expérimentales
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

2BACSPF & 2BACSVTF
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Extraits du bac
05 Examens blancs corrigés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac Sciences Mathématiques
14 Cours bien détaillés
14 Résumés bien précis
14 Séries d'exercices
8 Devoirs libres corrigés
16 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

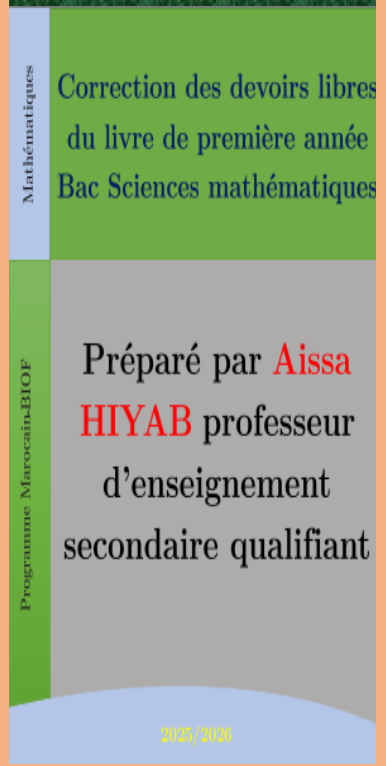
2BSM A&B
Résumés des cours
8 Séries d'exercices et problèmes
8 Devoirs libres corrigés
Extraits du bac
Examen blanc corrigé
Astuces pour les concours
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

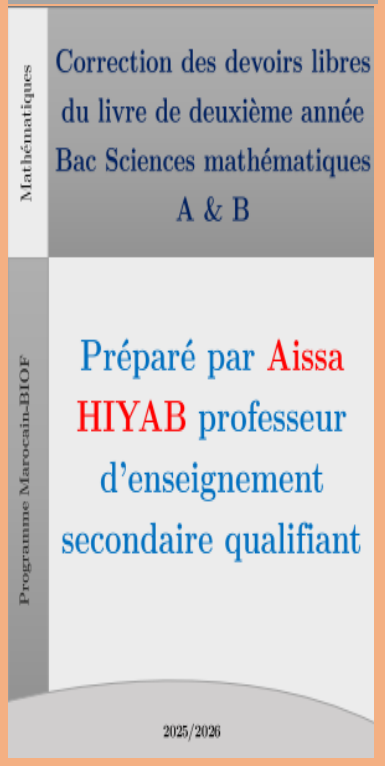
Première année Bac sciences économiques et la gestion
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

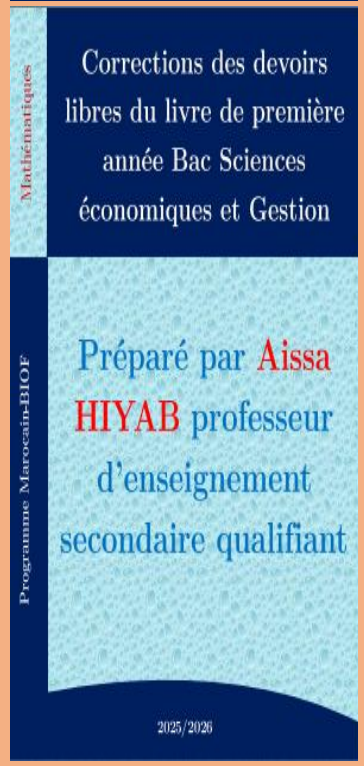
Mathématiques
Exercices résolus pour
Tronc commun sciences et tronc commun technologique
Correction bien detaillée de 185 exercices
Programme Marocain
15 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques
Exercices résolus pour
Première année Bac sciences expérimentales
Correction bien detaillée de 156 exercices
Programme Marocain
12 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques
Exercices résolus pour
2BACSPF & 2BACSVTF
Correction bien detaillée de 177 exercices
Programme Marocain
12 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
5 Examens blancs corrigés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Mathématiques
Correction des devoirs libres du livre de première année Bac Sciences mathématiques
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026


Mathématiques
Correction des devoirs libres du livre de deuxième année Bac Sciences mathématiques A & B
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026


Mathématiques
Corrections des devoirs libres du livre de première année Bac Sciences économiques et Gestion
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026